UNIVERSIDAD DE MURCIA

Posgrado de Matemáticas

Máster de Matemática Avanzada

TESIS DE MÁSTER

LEMA DE URYSOHN Y APLICACIONES

José Luis Dávila Albarrán

Curso 2012-2013

D. Bernardo Cascales Salinas, Catedrático del Área de Análisis Matemático del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

AUTORIZA: La presentación de la Tesis de Máster titulada "Lema de Urysohn y aplicaciones", realizada por D. José Luis Dávila, bajo mi inmediata dirección y supervisión, dentro del Máster de Matemática Avanzada.

En Murcia, a 23 de Septiembre de 2013

Fdo: Bernardo Cascales Salinas

LEMA DE URYSOHN Y APLICACIONES

José Luis Dávila Albarrán

dirigida por

Bernardo Cascales Salinas

Contenidos

Introducción

En cuanto a teoremas de extensión, posiblemente el teorema de Hahn-Banach sea el más conocido en el Análisis Funcional, sin embargo este resultado está restringido a una clase especial de espacios topológicos, los espacios localmente convexos. Para la época en que Hans Hahn y Stefan Banach (en la década de 1920) demostraron este resultado, también se estaba estudiando la posibilidad de extender funciones continuas en un caso más "general", de forma más concreta. Si A es un subespacio de un espacio topológico X y f es una función real y continua definida en A, se plantea encontrar una función F real y continua tal que coincida con f al ser ésta restringida al conjunto A. Heinrich Tietze [12] (1880-1964) ya estaba trabajando en este problema y aportó en 1915 un primer resultado; bajo el supuesto de que X sea un espacio metrizable con métrica d, A un cerrado en X e $\inf f(A) > 0$, mostró que la función

$$F_t(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \sup_A \left(\dfrac{f(a)}{1+d(x,A)^2} \right)^{d(x,A)^{-1}} & si \quad x \in X \setminus A \end{cases}$$

es una extensión continua de la función f. Años más tarde, en 1919, el matemático Felix Hausdorff [5] logró generalizar este resultado mediante la función:

$$F_h(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x \in A \\ \inf_A \left(f(a) + \dfrac{d(x,a)}{d(x,A)} - 1 \right) & si \quad x \in X \setminus A \end{cases}$$

demostrando la continuidad de F_h partiendo solamente de la continuidad de f. Fue en

1924, cuando Pavel Urysohn (1898-1924) dió una generalización a través del siguiente resultado:

Teorema (Teorema de extensión de Tietze)**.** *Si A es un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $f : A \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe una función continua $F : X \to \mathbb{R}$ tal que $F(x) = f(x)$ para cada $x \in A$.*

La demostración de este maravilloso resultado no hubiese sido posible sin un "lema previo", conocido actualmente como el **Lema de Urysohn** y que fue demostrado por el mismo Urysohn.

Lema (Lema de Urysohn)**.** *Si A y B son subconjuntos cerrados y disjuntos de un espacio normal X, entonces existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que*

$$f(A) \subset \{0\} \quad y \quad f(B) \subset \{1\}$$

En esta memoria estudiaremos este lema, así como algunos resultados importantes que se derivan de este, para tal fin, hemos dividido este trabajo en tres capítulos.

El capítulo 1 se dedica a introducir la noción de espacio normal, mostrando además los principales espacios topológicos que son normales (espacios Hausdorff-paracompactos, regular-Lindelöf y pseudométricos) para luego dar la demostración del lema de Urysohn y el teorema de extensión de Tietze, que a su vez nos dan caracterizaciones de los espacios normales.

En el capítulo 2 comenzamos demostrando otras dos caracterizaciones de los espacios normales, para luego dar una aplicación del teorema de extensión de Tietze en la que veremos que la compacidad de la bola $\overline{B(0,1)}$ en un espacio de Banach es una condición necesaria en el teorema del punto fijo de Brouwer. Por último estudiaremos un lema tipo Urysohn para ágebras uniformes con unidad.

El capítulo 3 está dedicado a demostrar el teorema de Stone-Weierstrass partiendo del criterio de densidad de Urysohn. Finalmente terminaremos este trabajo mostrando como se puede construir para un subconjunto cerrado A de un espacio métrico X una aplicación lineal y continua $\Lambda : C_b^{\mathbb{R}}(A) \to C_b^{\mathbb{R}}(X)$ de tal forma que $\Lambda(f)$ es una extensión de f para cada $f \in C_b^{\mathbb{R}}(A)$, donde para un subconjunto B de X, $C_b^{\mathbb{R}}(B)$ denota al espacio de las funciones reales, continuas y acotadas definidas en B.

José Luis Dávila

Murcia, Septiembre del 2013

Breve reseña sobre Pavel Urysohn y Heinrich Tietze

LA topología es probablemente la más joven de las ramas clásicas de las matemáticas. En contraste con el álgebra, la geometría y la teoría de números, cuyos orígenes datan de tiempos muy antiguos, la topología hace su gran aparición apenas en el siglo XVII.

Este trabajo centra su atención en un lema importante para esta rama de las matemáticas, y otras donde encuentra numerosas aplicaciones, como el análisis matemático. Dicho lema lleva por nombre el lema de Urysohn, el cual indica que un espacio topológico es normal, si y sólo si, cualquier par de subconjuntos disjuntos y cerrados pueden ser separados por una función continua.

Este lema se utiliza comúnmente para la construcción de funciones continuas con varias propiedades en espacios normales. Es ampliamente aplicable, ya que todos los espacios métricos y todos los espacios de Hausdorff compactos son normales. El lema en cuestión es a su vez generalizado por el teorema de extensión de Tietze.

Tal lema y tal generalización deben sus nombres a los matemáticos Pavel Samuilovich Urysohn y Heinrich Franz Friedrich Tietze respectivamente.

Pavel Samuilovich Urysohn

Pavel Urysohn (03 de Febrero de 1898 - 17 de Agosto de 1924) fue un matemático ruso que se graduó en la Universidad de Moscú en 1919 y se doctoró en 1921. Este matemático se interesó por la Topología desde que culminó su doctorado, en particular, a elucidar el concepto de dimensión. Este interés surgió debido a dos preguntas que planteó el brillante matemático ruso Dimitri Egorov (1869-1931), pidiendo encontrar una definición topológica intrínseca general para ciertos casos.

Urysohn atacó tales preguntas con determinación. No se sentó a la espera de la inspiración, y no trató una idea tras otra para ver si se le daba la definición topológica de dimensión que él estaba buscando. Trabajó fuertemente por más de un año logrando algunos avances. Pero fue hasta finales del año 1922 que fue presentada la teoría completa. Esto le permitió a Urysohn dar a conocer sus ideas internacionalmente atrayendo consigo matemáticos de la talla de Hilbert; Urysohn publicó una versión completa de su teoría de la dimensión en Fundamenta Mathematicae, escribió un artículo importante en dos partes en 1923, pero no apareció impreso hasta 1925 y 1926. Lamentablemente Urysohn había muerto antes de la publicación. El documento comienza con Urysohn declarando su objetivo, que era:

Indicar los conjuntos más generales que todavía merecen ser llamados “líneas” y “superficies”

De hecho Urysohn propuso hacer mucho más en este trabajo, que responder a las dos preguntas que Egorov había formulado. Él no solo buscaba definiciones de curvas y superficies, sino también las definiciones de n-dimensional múltiple cantoriana y por lo tanto de la dimensión en si. El concepto de dimensión era, de hecho, el centro de su atención.

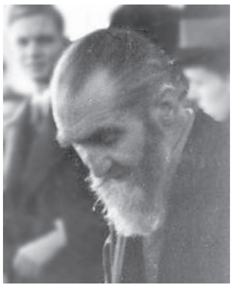
Urysohn no sabía de la contribución de Brouwer, cuando trabajaba en los detalles de su teoría de la dimensión topológica. Brouwer había hecho publicaciones sobre el tema en 1913. En el mismo se daba una definición global, en contraste con la definición local de dimensión que daba Urysohn. Pero tal trabajo tenia un error, el cual fue descubierto por el mismo Urysohn al plantearse un contraejemplo. Otro aspecto importante de las ideas de Urysohn fue el hecho de que presento su trabajo en el contexto de los espacios métricos compactos. Tras la muerte de Urysohn, Aleksandrov argumentó que si bien la definición de la dimensión de Urysohn fue dado para un espacio métrico, es sin embargo, completamente equivalente a la definición dada por Menger para espacios topológicos generales.

Otro de los grandes aportes de Urysohn fue lo que hoy es conocido como el teorema de metrización de Urysohn y su construcción de un espacio métrico separable universal que contiene una imagen isométrica de cualquier espacio métrico, fue uno de los últimos resultados de Urysohn.

Las principales contribuciones de Urysohn, además de la teoría de la dimensión que se discutió anteriormente, son la introducción a la investigación de una clase de superficies normales así como teoremas de metrización. Se le recuerda sobre todo por "el lema de Urysohn" que demuestra la existencia de una cierta función continua tomando valores 0 y 1 en determinados subconjuntos cerrados.

Después de la muerte de Urysohn, Brouwer y Aleksandrov se aseguraron de que las matemáticas que este matemático dejó fueran debidamente tratadas.

Heinrich Franz Friedrich Tietze



Heinrich Tietze (31 de Agosto de 1880 - 17 de Febrero de 1964) fue un matemático austríaco. Estudió en la Universidad Técnica de Viena desde 1898 hasta 1902 y completó su formación en la Universidad de Munich. Obtuvo su doctorado en 1904, después de esto asistió a algunas conferencias y allí surgió su gusto inmediato por las nociones topológicas y a partir de entonces su principal tema de investigación.

Desde 1910 fue profesor extraordinario de matemáticas en Brünn (hoy Brno), y en 1913 fue ascendido a profesor ordinario, pero su carrera fue interrumpida por el estallido de la Primera Guerra Mundial y tuvo que luchar como soldado en el ejército austríaco. Después de la guerra fue llamado de la Universidad de Múnich, donde enseñaría hasta su jubilación en 1950.

Si bien es cierto que Tietze dedicó parte de su trabajo a cuestiones como construcciones con regla y compás, las fracciones continuas, las particiones, la distribución de números primos y la geometría diferencial, también es cierto que la mayor parte de su trabajo la dedicó a la topología. Más importante aún, Tietze desempeñó un papel de liderazgo en algunos logros de la topología.

Por ejemplo; el problema del coloreado de mapas, establece un primer resultado en las áreas adyacentes de una superficie orientada. También produjo una prueba elemental (que se reproduce en varios libros de acertijos matemáticos) de que el teorema de los cuatro colores no tiene equivalente en las dos dimensiones anteriores.

En un documento de 1908, Tietze produjo una presentación finita para el grupo fundamental e ideó las transformaciones Tietze conocidas para mostrar que los grupos fundamentales son invariantes topológicos. Las ahora famosas transformaciones Tietze cambian una presentación de un grupo finito presentado a otra presentación sin necesidad de cambiar el grupo que se define por la presentación. Es posible pasar de cualquier presentación finito dado de un grupo a otro usando transformaciones Tietze.

En el mismo artículo, Tietze da la primera referencia al problema de isomorfismo de grupos, a saber: si dos grupos son definidos por las presentaciones finitos, ¿existe un algoritmo para decidir si son isomorfos o no? Por supuesto Tietze da el problema en el contexto de los grupos fundamentales de espacios topológicos.

Es justo decir que Von Dyck inició el estudio de la teoría de grupos combinatoria pero Tietze hizo el primer gran paso hacia adelante en ella. Tietze recibió muchos honores por sus contribuciones. En particular, fue elegido miembro de la Academia Bávara de Ciencias y sirvió dos mandatos (1934-1942 y 1946-1951) como secretario de la División de Matemáticas y Ciencias Naturales. También fue elegido miembro de la Academia Austríaca de Ciencias en 1959.

Es cierto que se han hecho grandes avances en esta rama de las matemáticas pero también es verdad que aún queda un largo camino por recorrer, aunque son muchos los resultados valiosos a los que se pueden llegar con estas teorías. Estos matemáticos crearon teorías y teoremas que le permiten a otros matemáticos seguir con esta línea de investigación.

Capítulo 1

Espacios Normales

«CONTENIDOS»

- Ejemplos de espacios normales.
  - Espacios Hausdorff - Paracompactos
  - Espacios Regulares - Lindelof
  - Espacios Pseudométricos
- Demostración del Lema de Urysohn.
- Demostración del Teorema de Extensión de Tietze haciendo uso del Lema de Urysohn.

LA noción de función continua es una de las más importantes en topología, más aún, si X es un espacio topológico y $C^{\mathbb{R}}(X)$ representa el conjunto de las funciones reales y continuas definidas en X, surgen de manera natural los siguientes plateamientos:

I) Las funciones constantes son las primeras que sirven como ejemplos de funciones continuas en $C^{\mathbb{R}}(X)$, sin embargo resultan de alguna forma ejemplos muy "triviales" dada la definición de continuidad, pudiéndonos preguntar acerca de la existencia de funciones continuas distintas a estas.

II) Si A es un subespacio de X, ¿serán las funciones en $C^{\mathbb{R}}(A)$ simplemente restricciones de funciones en $C^{\mathbb{R}}(X)$?, o planteado de otra forma: ¿Se podrían extender de manera continua a todo el espacio X las funciones en $C^{\mathbb{R}}(A)$?.

El Lema de Urysohn (1.3.3) y el Teorema de extensión de Tietze (2.3.6), ambos desmostrados por Pavel Urysohn [13] en el año 1924 sirven (entre otras muchas cosas) para dar respuesta de manera parcial (pero bastante amplia) a estos dos planteamientos.

Las principales referencias para la elaboración de este capítulo son: [6], [7].

1.1. Preliminares topológicos.

Aunque los espacios normales son el objeto de estudio del presente trabajo, hace falta definir otros espacios que por su naturaleza están íntimamente relacionados con estos, por lo que introducimos la siguiente definición

Definición 1.1.1 (Axiomas de Separación)**.** *Sea X un espacio topológico, diremos que:*

- *X es un* **espacio de Hausdorff** *si para cada par de puntos distintos x e y en X, existen abiertos U y V de X tales que $x \in U,\ \ y \in V$ y $U \cap V \neq \emptyset$.*
- *X es un* **espacio regular** *si para cada subconjunto cerrado A de X y cada $x \in X \setminus A$ existen abiertos U y V de X tales que $A \subseteq U,\ \ x \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.*
- *X es un* **espacio completamente regular** *si para cada subconjunto cerrado y no vacío A de X y cada $x \in X \setminus A$ existen una función $f : X \to [0,1]$ tal que $f(x) = 1$ y $f(A) = \{0\}$.*
- *X es un* **espacio normal** *si para cada par de subconjuntos disjuntos y cerrados A y B de X, existen abiertos U y V tales que*

$$A \subseteq U,\ \ B \subseteq V \text{ y } U \cap V = \emptyset.$$

Aunque existen otros axiomas de separación también importantes, solo haremos uso de los mencionados en la definición previa, en [7] se pueden encontrar las relaciones entre estos y otros axiomas.

Proposición 1.1.2. *Dado un espacio topológico X las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) X es normal.

(ii) Para cada par de subconjuntos cerrados A y B de X disjuntos, existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $A \subseteq U$ y $B \cap \overline{U} = \emptyset$.

(iii) Para cada subconjunto cerrado A de X, si $U \subseteq X$ es un abierto que contiene a A existe un abierto $V \subseteq X$ tal que $A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Por ser X un espacio normal existen abiertos U y V tales que $A \subseteq U, B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$; luego $\overline{U} \subseteq \overline{X \setminus V} = X \setminus V$ obteniendo así que

$$B \cap \overline{U} \subseteq V \cap (X \setminus V) = \emptyset.$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Sea A un subconjunto cerrado en X y U un abierto conteniendolo, de esta forma tendríamos que A y $X \setminus U$ son subconjuntos cerrados en X y disjuntos, por lo que existiría un abierto V tal que $A \subseteq V$ y $(X \setminus U) \cap \overline{V} = \emptyset$, esto último nos da la siguiente relación

$$A \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq U$$

$(iii) \Rightarrow (i)$ Sean A y B subconjuntos cerrados en X, si A y B son disjuntos entonces $X \setminus A$ sería un abierto que contiene a B, luego existiría un abierto $V \subseteq X$ tal que $B \subseteq V \subseteq \overline{V} \subseteq X \setminus A$, esto último implicaría que A está contenido en el abierto $X \setminus \overline{V}$ el cual es disjunto de V.

□

1.2. Ejemplos de espacios normales.

Aunque la definición de normalidad es aparentemente “bastante sencilla”, no resulta obvio saber cuales de los espacios más comunes encontrados en topología gozan de esta propiedad, por lo que dedicaremos cada uno de los teoremas de esta sección a mostrar algunos espacios conocidos que se encuentran dentro de esta gran familia.

Definición 1.2.1. *Sea X un espacio topológico, A un subconjunto de X y $\mathscr{U}$ una colección de subconjuntos de X, diremos que*

- *$\mathscr{U}$ es un* **cubrimiento de** *A (o simplemente que cubre a A), si la unión de los elementos en $\mathscr{U}$ contienen al conjunto A, si además los elementos de A son abiertos en X diremos que $\mathscr{U}$ es un* **cubrimiento abierto** *de A.*

- *$\mathscr{U}$ es* **localmente finito** *en X si para cada $x \in X$, existe un entorno U de x que intercepta solo a una cantidad finita de elementos en $\mathscr{U}$.*
- *$\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{P}(X)$ es un* **refinamiento** *de $\mathscr{U}$ si cada elemento en $\mathscr{U}_0$ está contenido en algún elemento de $\mathscr{U}$, si además los elementos en $\mathscr{U}_0$ son abiertos en X diremos que $\mathscr{U}_0$ es un* **refinamiento abierto** *de $\mathscr{U}$.*
- *A es* **Lindelöf** *si todo cubrimiento abierto de A posee un subcubrimiento numerable que cubre a A.*
- *A es* **paracompacto** *si todo cubrimiento abierto de A posee un refinamiento abierto localmente finito que cubre a A.*
- *A es* **compacto** *si todo cubrimiento abierto de A posee un subcubrimiento abierto finito.*

Lema 1.2.2. *Sea $\mathscr{U}$ una colección localmente finita en un espacio topológico X, entonces se cumplen las siguientes afirmaciones*

(i) *Cualquier subconjunto de $\mathscr{U}$ es localmente finito en X;*

(ii) $\overline{\bigcup_{A\in\mathscr{U}} A} = \bigcup_{A\in\mathscr{U}} .\overline{A}$

Demostración: La afirmación (i) es evidente, pues si $\mathscr{U}_0 \subseteq \mathscr{U}$ y $x \in X$, existiría un entorno U de x tal que la colección $\{A \in \mathscr{U} \ : \ A \cap U \neq \emptyset\}$ es finito, siéndolo del mismo modo la colección $\{A \in \mathscr{U}_0 \ : \ A \cap U \neq \emptyset\}$.

Para la demostración de (ii) bastará con demostrar que $\overline{\bigcup_{A\in\mathscr{U}} A} \subseteq \bigcup_{A\in\mathscr{U}} \overline{A}$, para esto llamemos $Y = \bigcup_{A\in\mathscr{U}} A$, sea $y \in \overline{Y}$ y escojamos un entorno U de y tal que la colección $L := \{A \in \mathscr{U} \ : \ A \cap U \neq \emptyset\}$ es finita, veamos que $y \in \bigcup_{A\in L} \overline{A}$, de no suceder esto último se tendría que el conjunto $\left(X \setminus \bigcup_{A\in L} \overline{A}\right) \cap U$ es un abierto que contiene a y, por lo que necesariamente este entorno interceptaría a Y y en consecuencia existiría $A_0 \in \mathscr{U}$ tal que

$$A_0 \cap \left(X \setminus \bigcup_{A\in L} \overline{A}\right) \cap U \neq \emptyset$$

lo cual es una contradicción, por lo tanto

$$y \in \bigcup_{A \in L} \overline{A} \subseteq \bigcup_{A \in \mathscr{U}} \overline{A}$$

□

Teorema 1.2.3. *Todo espacio Hausdorff paracompacto es normal.*

Demostración: Sea X un espacio Hausdorff paracompacto, veamos primero que X es un espacio regular.

Sean A un subconjunto cerrado en X y x un elemento en $X \setminus A$, la condición de Hausdorff nos permite construir un cubrimiento abierto $\{U_a\}_a \in A$ tal que para cada $a \in A$, U_a es un entorno de a cuya clausura no contiene a x, así la colección $\{U_a\}_{a \in A} \cup \{X \setminus A\}$ es un cubrimiento abierto de X que a su vez tiene un refinamiento abierto $\mathscr{U}$ localmente finito que cubre a X, ahora consideremos la colección

$$\mathscr{U}_0 := \{C \in \mathscr{U} \ : \ C \cap A \neq \emptyset\}$$

obviamente la unión de los elementos en $\mathscr{U}_0$ es un abierto que contiene a A, así que bastará con mostrar que

$$x \notin \overline{\bigcup_{C \in \mathscr{U}_0} C}.$$

Ya que $\mathscr{U}_0$ es un subconjunto de $\mathscr{U}$ el lema anterior nos garantiza que

$$\overline{\bigcup_{C \in \mathscr{U}_0} C} = \bigcup_{C \in \mathscr{U}_0} \overline{C} \tag{1.1}$$

por otra parte si $C \in \mathscr{U}_0$ entonces $C \subseteq U_{a_0}$ para algún $a_0 \in A$, luego $\overline{C} \subseteq \overline{U}_{a_0}$ y así se tiene que $x \notin \overline{C}$ esto implica por (1.1) que $x \notin \overline{\bigcup_{C \in \mathscr{U}_0} C}$.

Sea B un subconjunto cerrado de X el cual no tiene elementos en común con A, por lo demostrado en el parrafo anterior podemos encontrar para cada $b \in B$ un entorno V_b de b cuya clausura no intercepta a A. Sea $\mathscr{V}$ un refinamiento abierto del cubrimiento $\{V_b\}_{b \in B} \cup \{X \setminus B\}$ de X que a su vez cubre a X, siguiendo el mismo esquema de lo hecho anteriormente se define

$$\mathscr{V}_0 := \{C \in \mathscr{V} \ : \ C \cap B \neq \emptyset\}$$

y se llega de la misma manera a que

$$B \subseteq \bigcup_{C \in \mathscr{V}_0} C \ \text{ y } \ \overline{\bigcup_{C \in \mathscr{V}_o} C} \ \cap \ A = \emptyset$$

□

Como consecuencia inmediata del teorema previo, se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.2.4. *Todo espacio Hausdorff compacto es normal.*

Lema 1.2.5. *Si X es un espacio Lindelöf y A es un subconjunto cerrado de X, entonces A es Lindelöf.*

Demostración: Si $\mathscr{U}$ es un cubrimiento abierto de A entonces la colección $\mathscr{U} \cup \{X \setminus A\}$ es un cubrimiento abierto de X que a su vez posee un subcubrimiento abierto numerable $\mathscr{U}_0$ que cubre a X, lo que implica que la colección

$$\mathscr{U}_1 = \{U \in \mathscr{U} \ : \ U \cap A \neq \emptyset\}$$

es un subcubrimiento abierto de $\mathscr{U}$ el cual es numerable y que cubre a A.

□

Teorema 1.2.6. *Todo espacio regular Lindelöf es normal.*

Demostración: Sea X un espacio Lindelöf y regular, sean A y B subconjuntos cerrados de X sin elementos en común. Haciendo uso de la regularidad de X podemos encontrar para cada $a \in A$ un entorno U_a de a cuya clausura no intercepta a B. De manera análoga podemos fijar para cada $b \in B$ un entorno V_b de b cuya clausura no intercepta a A, así las colecciones $\{U_a\}_{a \in A}$ y $\{V_b\}_{b \in B}$ son cubrimientos abiertos de A y B (respectivamente). Por el lema anterior, se tiene que A y B son también espacios Lindelöf, por lo que existirán sucesiones $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ y $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{a_n} \ \text{ y } \ B \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} V_{b_n}$$

Definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ los conjuntos

$$U_n = \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{V}_{b_i} \right) \cap U_{a_n}, \ \ V_n = \left(X \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{U}_{a_i} \right) \cap V_{b_n}.$$

Así los conjuntos $U = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U_n$ y $V = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} V_n$ son abiertos en X, además es fácil chequear que $A \subseteq U,\ B \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$.

$\square$

Definición 1.2.7. *Diremos que un conjunto no vacío X es un espacio pseudométrico (resp. metrico) si esta dotado de una pseudométrica (resp. métrica), donde una pseudométrica es una función real d definida en el producto $X \times X$ y que además satisface las siguientes propiedades:*

$$(A1) \quad d(x,y) = d(y,x) \geq 0 \qquad \textit{para cada} \quad x,y \in X$$

$$(A2) \quad d(x,x) = 0 \qquad \textit{para cada} \quad x \in X$$

$$(A3) \quad d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) \qquad \textit{para cada} \quad x,y,z \in X$$

Una métrica es una pseudométrica d que satisface además que $d(x,y) > 0$ para cada x , y en X distintos.

Observación: Si X es un espacio pseudométrico con pseudométrica d entonces:

∗ Si $x \in X$ y $r \geq 0$ se define la **bola abierta** de radio r y centro x al conjunto

$$B_d(x,r) := \{z \in X \ : \ d(x,z) < r\}$$

∗ Si A y B son subconjuntos no vacíos de X y x es un elemento en X se define

$$d(x,A) := \text{ínf}\{d(x,y) \ : \ y \in A\} \ \text{ y } \ d(A,B) := \text{ínf}\{d(z,y) \ : \ z \in A \text{ y } y \in B\}$$

Donde se puede chequear fácilmente (haciendo solo uso de las propiedades A_1, A_2 y A_3) la desigualdad

$$|d(x,A) - d(y,A)| \leq d(x,y) \text{ para cada } x,y \in X \tag{1.2}$$

además si A es cerrado se cumple que

$$x \in A \Leftrightarrow d(x,A) = 0.$$

* La desigualdad en (1.2) implica que la aplicación $x \rightsquigarrow d(x,A)$ es uniformemente continua.

Teorema 1.2.8. *Todo espacio pseudométrico es normal.*

Demostración: Sea X un espacio pseudométrico con pseudométrica d. Si A y B son subconjuntos disjuntos y cerrados de X, definamos la función $h : X \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = d(x,A) - d(x,B) \text{ para cada } x \in X$$

Por las observaciones previas se tiene que la función h es continua, por lo tanto los conjuntos $h^{-1}((-\infty,0))$ y $h^{-1}((0,+\infty))$ son abiertos y disjuntos, además

$$A \subseteq h^{-1}((-\infty,0)) \text{ y } B \subseteq h^{-1}((0,+\infty))$$

□

Corolario 1.2.9. *Todo espacio métrico es normal.*

1.3. Lema de Urysohn y el Teorema de extensión de Tietze.

La demostración del Teorema 1.2.8 sugiere el uso de funciones continuas para encontrar abiertos que separen a cerrados disjuntos, de forma más concreta, si X es un espacio métrico con métrica d, A y B son subconjuntos no vacíos de X cerrados y disjuntos la aplicación

$$f(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,B)}$$

es una aplicación continua y acotada, es mas $f(A) = \{0\}$ y $f(B) = \{1\}$. lo que nos da una idea de como buscar abiertos en X que separen a los conjuntos A y B, como por ejemplo los abiertos $f^{-1}((-1,1/2))$ y $f^{-1}((1/2,2))$. A manera de resumen podemos deducir que el espacio métrico X es normal pues para cada par de subconjuntos no vacíos A y B de X cerrados y disjuntos existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que

$$f(A) = \{0\} \text{ y } f(B) = \{1\}$$

esta propiedad no sólo la tiene los espacios métricos sino también los espacios normales y que Urysohn demostró a través de su famoso Lema, obteniendo así una caracterización de los espacios normales. La idea dada por Urysohn [13] para la demostración de este lema está basada en la construcción de un cubrimiento abierto indexado por un subconjunto de $\mathbb{R}$ denso satisfaciendo las condiciones dadas en el siguiente lema.

Lema 1.3.1. *Sea X un espacio topológico y D un subconjunto denso de $\mathbb{R}$, supongamos que $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$ es un cubrimiento abierto de X satisfaciendo*

1. *Si $\alpha, \beta \in D$ y $\alpha < \beta$ entonces $\overline{U}_\alpha \subseteq U_\beta$.*
2. $\bigcap\limits_{\alpha\in D} U_\alpha = \emptyset$

Si definimos la función $f : X \to \mathbb{R}$ como

$$f(x) = \operatorname{ínf}\{\alpha \in D \,:\, x \in U_\alpha\}$$

entonces se tiene que f es continua.

Demostración: Note que para cada $x_0 \in X$ el conjunto $\{\alpha \in D \,:\, x_0 \in U_\alpha\}$ es no vacío (pues $\{U_\alpha\}_{\alpha\in D}$ cubre a X) y además acotado inferiormente, pues de no ser así tendría que existir una sucesión no acotada $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \{\alpha \in D \,:\, x_0 \in U_\alpha\}$ estrictamente decreciente. Esto implicaría por la condición (1) que en realidad el conjunto $\{\alpha \in D \,:\, x_0 \in U_\alpha\}$ es todo D, por lo que se tiene que $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in D} U_\alpha$ contradiciendo (2). Ahora veamos que f es continua en x_0, sea $\varepsilon > 0$ y $\alpha_0 \in D$ tal que

$$f(x_0) \leq \alpha_0 < f(x_0) + \varepsilon \text{ y } x_0 \in U_{\alpha_0}$$

escojamos $\alpha_1, \alpha_2 \in D$ con

$$f(x_0) - \varepsilon < \alpha_1 < \alpha_2 < f(x_0)$$

por como está definido $f(x_0)$ y por la propiedad (1) se tiene que el abierto $U_{\alpha_0} \setminus \overline{U}_{\alpha_1}$ contiene a x_0, por otra parte, si x es un elemento en $U_{\alpha_0} \setminus \overline{U}_{\alpha_1}$, se cumple que

$$\alpha_0 \in \{\alpha \in D \,:\, x \in U_\alpha\} \subseteq [\alpha_1, +\infty)$$

por lo tanto $\alpha_1 \leq f(x) \leq \alpha_0$ y así queda demostrado que

$$f(U_{\alpha_0} \setminus \overline{U}_{\alpha_1}) \subseteq [\alpha_1, \alpha_0] \subseteq (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon))$$

□

Proposición 1.3.2. *El conjunto de los números racionales diádicos (racionales de la forma $\frac{k}{2^n}$ con $n \in \mathbb{N}^+$ y $k = 1, \ldots, 2^{n-1}$) es denso en el intervalo $(0,1)$.*

Demostración: Sean $x, y \in (0,1)$ con $x < y$, escojamos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{2^n} < y - x \tag{1.3}$$

Si $k_0 = \text{mín}\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, x < \frac{k}{2^n}\right\}$ y suponemos que $y < \frac{k_0}{2^n}$, entonces se tienen las desigualdades

$$\frac{k_0 - 1}{2^n} \leq x < y < \frac{k_0}{2^n}$$

por lo tanto $\frac{1}{2^n} = \frac{k_0}{2^n} - \frac{k_0-1}{2^n} > y - x$, lo que contradice (1.3), por lo tanto se tiene que

$$x < \frac{k_0}{2^n} \leq y$$

□

Construcción del cubrimiento dado por Urysohn: Sea X un espacio normal, $A, B \subseteq X$ cerrados y disjuntos, consideremos el conjunto de $D = \mathbb{R} \setminus (0,1) \cup L$ donde L es el conjunto de los números diádicos . La construcción del cubrimiento $\{U_\alpha\}_{\alpha \in D}$ lo haremos de la siguiente manera:

- Si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus (0,1)$ se define

$$U_\alpha := \begin{cases} \emptyset & si \quad \alpha \leq 0 \\ X & si \quad \alpha \geq 1 \end{cases}$$

- Ahora toca definir la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in L}$; para esto, definamos para cada $n \in \mathbb{N}$ el conjunto

$$L_n := \left\{ \frac{k}{2^n} \; : \; k \text{ es un entero positivo impar menor que } 2^n \right\}$$

L_1 : $\frac{1}{2}$

L_2: $\frac{1}{2^2}$ $\frac{3}{2^2}$

L_3: $\frac{1}{2^4}$ $\frac{3}{2^3}$ $\frac{5}{2^3}$ $\frac{5}{2^3}$

L_4: $\frac{1}{2^4}$ $\frac{3}{2^4}$ $\frac{5}{2^4}$ $\frac{7}{2^4}$ $\frac{9}{2^4}$ $\frac{11}{2^4}$ $\frac{13}{2^4}$ $\frac{15}{2^4}$

$\vdots$ $\vdots$ $\vdots$ $\vdots$

Ya que $L = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} L_n$ definiremos la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha\in L}$ por inducción a través de los conjuntos L_n.

Para los índices en L_1: Por ser X un espacio normal, el Lema 1.1.2 nos garantiza la existencia de un abierto $U_{1/2}$ satisfaciendo

$$A \subseteq U_{1/2} \subseteq \overline{U_{1/2}} \subseteq X \setminus B$$

supongamos que para $n \in \mathbb{N}$ hemos definido la colección $\{U_\alpha\}$ con $\alpha \in \bigcup_{i=1}^{n} L_i$ de tal forma que

$$\overline{U_\alpha} \subset U_\beta \text{ para cada } \alpha, \beta \in \bigcup_{i=1}^{n} L_i \text{ con } \alpha < \beta$$

y

$$A \subseteq U_\alpha \subseteq X \setminus B \text{ para cada } \alpha \in \bigcup_{i=1}^{n} L_i$$

Para los índices en L_{n+1} : Si $p \in L_{n+1}$, definimos U_p según los casos siguientes:

* Si $P = \frac{1}{2^{n+1}}$ definimos U_p como un abierto satisfaciendo que

$$A \subseteq U_p \subseteq \overline{U_p} \subset U_{\frac{1}{2^n}}$$

* Si $P = \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}$ definimos U_p como un abierto satisfaciendo que

$$\overline{U}_{\frac{2^n-1}{2^n}} \subseteq U_p \subseteq \overline{U_p} \subseteq X \setminus B$$

* Finalmente si $p \in \left(\frac{1}{2^{n+1}}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$ existen índice p_1, p_2 en $\bigcup_{i=1}^{n} L_i$ con $p_1 < P_2$ tales que $\left(\bigcup_{i=1}^{n} L_i\right) \cap (p_1, p_2) = \emptyset$ y $p_1 < p < p_2$, en este caso definimos U_p como abierto satisfaciendo que

$$\overline{U}_{p_1} \subset U_p \subset \overline{U}_p \subset U_{p_2}$$

Construida de esta forma la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in L}$ es evidente que

$$\overline{U}_\alpha \subseteq U_\beta \text{ para cada } \alpha, \beta \in L \text{ con } \alpha < \beta$$

y

$$A \subseteq U_\alpha \subseteq X \setminus B \text{ para cada } \alpha \in L \tag{1.4}$$

Luego la colección $\{U_\alpha\}_{\alpha \in D}$ satisface las condiciones del lema (1.3.1) por lo que la función $f : X \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \text{ínf}\{\alpha \in D \,:\, x \in U_\alpha\} \qquad (x \in X)$$

es continua, además por (1.4) se tiene que

$$f(A) = \{0\} \text{ y } f(B) = \{1\}$$

Quedando demostrado así el lema que hizo famoso a Pavel Urysohn que enunciamos a continuación.

Lema 1.3.3. *(**Lema de Urysohn**, 1924) Si X es un espacio normal, entonces para cada par de subconjuntos disjuntos A y B de X los cuales son cerrados, existe una función continua $f : X \to [0,1]$ tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$.*

Debido a que cualquier intervalo cerrado y acotado en $\mathbb{R}$ es homeomorfo al intervalo $[0,1]$ se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 1.3.4. *X es un espacio normal, si y solo sí, para cada par de subconjunto disjuntos A y B de X cerrados, existe una función continua $f : X \to [a,b]$ tal que*

$$f(A) \subseteq \{a\} \text{ y } f(B) \subseteq \{b\}$$

Una de las primeras aplicaciones del Lema de Urysohn fue dada por él mismo, al demostrar el Teorema de extensión de Tietze, dandole así respuesta al problema de extensión de funciones estudiada por Tietze en 1915, el siguiente lema nos será de utilidad para la demostración de dicho teorema.

Lema 1.3.5. *Si A es un subconjunto cerrado de un espacio normal X y $f : A \to [-M,M]$ es una función continua, entonces existe una función real y continua g definida en X tal que*

$$g(X) \subseteq \left[\frac{-M}{3}, \frac{M}{3}\right] \quad y \quad |f(x) - g(x)| < \frac{2}{3}M \quad \text{para cada } x \in A$$

Demostración: Consideremos los conjuntos

$$A_1 = f^{-1}\left(\left[\frac{M}{3}, M\right]\right) \quad \text{y} \quad A_2 = f^{-1}\left(\left[-M, \frac{-M}{3}\right]\right)$$

ambos son subconjuntos cerrados de X, por lo que el corolario anterior nos garantiza la existencia de una función continua $g : X \to [-M/3, M/3]$ tal que $g(A_1) \subseteq \{M/3\}$ y $g(A_2) \subseteq \{-M/3\}$. g sastiface las condiciones requeridas, pues si $x \in A$ entonces tendríamos que:

- Si $x \in A_1$, entonces $f(x), g(x) \in \left[\frac{M}{3}, M\right]$
- Si $x \in A_2$, entonces $f(x), g(x) \in \left[-M, \frac{-M}{3}\right]$
- sI $x \notin A_1, \cup A_2$ entonces $f(x), g(x) \in \left[\frac{-M}{3}, \frac{M}{3}\right]$

Cualquiera de estos casos lleva a que $|f(x) - g(x)| < \frac{2}{3}M$

Teorema 1.3.6. *(***Teorema de extensión de Tietze***)*

Si A es un subconjunto cerrado y no vacío de un espacio normal X y $f : A \to [-1,1]$ es una función continua, existe una función continua $F : X \to [-1,1]$ tal que $F|_A = f$

Demostración: Por el lema anterior existe una función real y continua g_1 definida sobre X tal que

$$g_1(X) \subseteq \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right] \text{ y } |h_1(x)| < \frac{2}{3} \ (x \in A)$$

donde $h_1 = f - g_1$ (sobre A).
Repitiendo el argumento ahora con la función $h_1 : A \to [-2/3, 2/3]$ encontramos otra función real y continua g_2 definida en X tal que

$$g_2(X) \subseteq \left[\frac{-2}{3^2}, \frac{2}{3^2}\right] \text{ y } |h_2(x)| < \left(\frac{2}{3}\right)^2 \quad (x \in A)$$

donde $h_2 = h_1 - g_2$ (sobre A).
Siguiendo este procedimiento construimos una sucesión $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^{\mathbb{R}}(X)$ y otra sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C^{\mathbb{R}}(A)$ tal que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\|g_n\|_\infty \leq \frac{2^{n-1}}{3^n}, \ \|h_n\|_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \tag{1.5}$$

y

$$h_{n+1} = h_n - g_{n+1} \text{ donde } h_1 = f - g_1 \tag{1.6}$$

(1.5) implica que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_\infty$ es convergente, por lo tanto la sucesión de funciones

$$s_n = g_1 + \cdots + g_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

converge uniformemente a una función $F \in C^{\mathbb{R}}(X)$ además

$$\|F\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \|g_n\|_\infty \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^n} = 1$$

por otra parte, las igualdades en (1.6) conllevan a que

$$f - s_n = h_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

puesto que $\lim\limits_{n\to\infty} \|h_n\|_\infty = 0$ se concluye que $F|_A = f$.

$\square$

Observación: Obviamente el Teorema de extensión de Tietze se mantiene si se sustituye el intervalo $[-1, 1]$ por cualquier otro intervalo cerrado y acotado e inclusive si se sustituye por el intervalo $(-1,1)$ (y es consecuencia también es válido si se sustituye por $\mathbb{R}$) ya que si $f(A) \subseteq (-1,1)$ y $F \in C^{\mathbb{R}}(X)$ es una extensión de f con $F(X) \subseteq [-1,1]$, se puede aplicar el Lema de Urysohn a los cerrados A y $B = F^{-1}(\{-1,1\})$ obteniendo una función $g : X \to [0,1]$ continua, tal que $g(A) \subset \{1\}$ y $g(B) \subset \{0\}$, así la función

$$F_0 = g.F : X \to (-1,1)$$

es continua y además extiende a f, obteniendo como consecuencia el siguiente corolario.

Corolario 1.3.7. *Si A es un subconjunto cerrado de un espacio normal X, entonces toda función en $C^{\mathbb{R}}(A)$ es una restricción de una función en $C^{\mathbb{R}}(X)$.*

Corolario 1.3.8. *Sea X un espacio topológico, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

(i) *X es normal*

(ii) *Para cada par de subconjuntos A y B cerrados en X y disjuntos existe una función $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f(A) \subseteq \{0\}$ y $f(B) \subseteq \{1\}$*

(iii) *Si $A \subseteq X$ es cerrado, entonces toda función $f \in C^{\mathbb{R}}(A)$ con $f(A) \subseteq [0,1]$ se puede extender a una función $F \in C^{\mathbb{R}}(X)$ con $F(X) \subseteq [0,1]$.*

Demostración: $(i) \Leftrightarrow (ii)$ lo da el corolario 1.3.4 y $(i) \Rightarrow (iii)$ es justamente el Teorema de extensión de Tietze, así que basta demostrar $(iii) \Rightarrow (ii)$, sean A y B subconjuntos disjuntos y cerrados de X, supongamos además que A es no vacío, definamos $f : A \cup B \to [0,1]$ como

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x \in A \\ 1 & si \quad x \in B \end{cases}$$

Obviamente f es una función continua definida en el cerrado $A \cup B$, luego existe una función $F : X \to [0,1]$ tal que F es continua y extiende a f, por lo tanto $F(A) = \{0\}$ y $F(B) = \{1\}$.

□

Capítulo 2

Aplicaciones del Lema de Urysohn y el Teorema de extensión de Tietze

«CONTENIDOS»

- Demostración del teorema de interpolación de Katetov.
- Distancia entre funciones en $\mathbb{R}^X$ y el espacio $C^{\mathbb{R}}(X)$.
- Compacidad en el Teorema del punto fijo de Brouwer.
- Versión compleja del Lema de Urysohn.

EN este capítulo mostraremos otras dos caracterizaciones de los espacios normales, la primera de estas es conocida como el Teorema de interpolación de Katetov y la segunda nos permitirá hallar mediante una ecuación, la distancia entre funciones en $\mathbb{R}^X$ y el espacio $C^{\mathbb{R}}(X)$. Además mostraremos haciendo uso del Teorema de extensión de Tietze como en un espacio de Banach $(X, ||\cdot||)$ infinito dimensional se puede construir una función continua $f : \overline{B_{||\cdot||}(0,1)} \to \overline{B_{||\cdot||}(0,1)}$ sin punto fijo, con el fin de recalcar la importancia de exigir la compacidad de la bola $\overline{B_{||\cdot||}(0,1)}$ en el Teorema del punto fijo de Brouwer, por último daremos la demostración de un lema tipo Urysohn para álgebras uniformes con unidad estudiado en el artículo [2].

Las principales referencias para la elaboración de este capítulo son: [1], [2], [6], [10].

2.1. Caracterización de espacios normales.

En esta sección daremos la demostración del Teorema de interpolación de Katetov el cual nos servirá como herramienta para demostrar que la ecuación

$$d(f, C(X)) = \frac{1}{2} osc(f)$$

se satisface para cualquier función $f \in \mathbb{R}^X$, donde X es un espacio normal

Definición 2.1.1. *Sea X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función, diremos que*

- *f es* **semicontinua superiormente** *si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $f^{-1}((-\infty, \alpha))$ es un abierto en X.*
- *f es* **semicontinua inferiormente** *si $-f$ es semicontinua superiormente.*

Si L es un conjunto cualquiera no vacío y $f, g \in \mathbb{R}^L$, denotamos por $f \vee g$ y $f \wedge g$ a las funciones definidas como:

$$f \vee g(a) = \max\{f(a), g(a)\} \text{ y } f \wedge g(a) = \min\{f(a), g(a)\} \text{ para cada } a \in L.$$

Note que si f, g son funciones en $\mathbb{R}^X$ semicontinuas superiormente, entonces las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$ también son semicontinuas superiormente, esto es consecuencia de que para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ se cumple las igualdades

$$\begin{aligned}(f \vee g)^{-1}(-\infty, \alpha) &= \{x \in X \,:\, f(x) < \alpha\} \cap \{x \in X \,:\, g(x) < \alpha\} \\ &= f^{-1}((-\infty, \alpha)) \cap g^{-1}((-\infty, \alpha))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f \wedge g)^{-1}(-\infty, \alpha) &= \{x \in X \,:\, f(x) < \alpha\} \cup \{x \in X \,:\, g(x) < \alpha\} \\ &= f^{-1}((-\infty, \alpha)) \cup g^{-1}((-\infty, \alpha))\end{aligned}$$

del mismo modo si f y g son semicontinuas inferiormente entonces también lo son las funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$.

Teorema 2.1.2. *(Teorema de interpolación de Katetov)*

Sea X un espacio topológico normal y sean $f_1 \leq f_2$ funciones en $\mathbb{R}^X$ con f_1 semicontinua superiormente y f_2 semicontinua inferiormente, entonces existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \qquad \textit{para cada } x \in X.$$

Demostración: Bastará con demostrar este resultado suponiendo que $f_1, f_2 \in (0,1)^{\mathbb{R}}$, pues al considerar un homeormorfimos estrictamente creciente $\phi : \mathbb{R} \to (0,1)$ (como por ejemplo $\phi(x) = \arctan(x)/\pi + 1/2$) se tendría que para cada $a \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{aligned}
(\phi \circ f_1)^{-1}(-\infty, \alpha) &= \{x \in X \ : \ \phi \circ f_1(x) < \alpha\} \\
&= \{x \in X \ : \ f_1(x) < \phi^{-1}(\alpha)\} \\
&= f_1(-\infty, \phi^{-1}(\alpha))
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
(\phi \circ f_2)^{-1}(\alpha, +\infty) &= \{x \in X \ : \ \phi \circ f_2(x) > \alpha\} \\
&= \{x \in X \ : \ f_2(x) > \phi^{-1}(\alpha)\} \\
&= (\phi \circ f_2)^{-1}(\phi^{-1}(\alpha), +\infty)
\end{aligned}$$

estas igualdades implican que $\phi \circ f_1$ es semicontinua superiormente y $\phi \circ f_2$ es semicontinua inferiormente, además $\phi \circ f_1 \leq \phi \circ f_2$ y $\phi \circ f_1, \phi \circ f_2 \in (0,1)^X$, luego si existe $f \in \mathbb{R}^X$ continua tal que

$$\phi \circ f_1 \leq f \leq \phi \circ f_2$$

se obtiene que $\phi^{-1} \circ f$ es continua y además $f_1 \leq \phi^{-1} \circ f \leq f_2$.

Dicho esto, podemos comenzar la demostración suponiendo que $f_1, f_2 \in (0,1)^X$, el primer paso consiste en demostrar la siguiente afirmación.

<u>Afirmación:</u> Para cada $\varepsilon > 0$ existe una función continua $h_\varepsilon : X \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_1 - \varepsilon \leq h_\varepsilon \leq f_2 + \varepsilon.$$

Sea $\varepsilon > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$. Definamos para cada $k = 1, 2, \ldots, n$, los conjuntos

$$A_k := \left\{ x \in X \ : \ \frac{k}{n} \leq f_1(x) \right\} = X \setminus f_1^{-1}\left(\left(-\infty, \frac{k}{n} \right) \right)$$

$$B_k := \left\{ x \in X \ : \ f_2 \leq \frac{k-1}{n} \right\} = X \setminus f_2^{-1}\left(\left(\frac{k-1}{n}, +\infty \right) \right)$$

Los conjuntos A_k y B_k son disjuntos, debido a que $f_1 \leq f_2$, además A_k y B_k son subconjutos cerrados de X, haciendo uso del Lema de Urysohn podemos afirmar que existe para cada $k = 1, \ldots, n$ una función $h_k : X \to [0, 1]$ tal que $h_k(A_k) \subseteq \{1\}$ y $h_k(B_x) \subseteq \{0\}$, definamos

$$h_\varepsilon = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} h_i$$

tenemos así que h_ε es una función continua, veamos ahora que $f_1 - \varepsilon \leq h_\varepsilon \leq f_2 + \varepsilon$.

Si $x \in X$, existe $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ tal que

$$\frac{k}{n} \leq f_1(x) < \frac{k+1}{n}$$

si $k \geq 1$ tenemos que $x \in A_i$ para cada $i \leq k$ y por lo tanto, $k_i(x)$=1 para cada $i \leq k$ por lo que

$$f_1(x) - \frac{1}{n} < \frac{k}{n} < h_\varepsilon(x)$$

obviamente esta desigualdad se cumple si $k = 0$. De igual forma existe $l \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que

$$\frac{l-1}{n} < f_2(x) \leq \frac{1}{n}$$

si $l < n$, tenemos que $x \in B_j$ para cada $j > l+1$ y así $h_j(x) = 0$ para cada $j > l+1$, por lo que se obtiene

$$h_\varepsilon(x) \leq \frac{1}{n} \leq f_2(x) + \frac{1}{n}$$

en el caso que $l = n$ se obtiene de forma inmediata esta última desigualdad, quedando así demostrada la afirmación.

Por la afirmación, existe una función continua h_1 tal que

$$f_1 - \frac{2}{3} \leq h_1 \leq f_2 + \frac{2}{3}$$

Supongamos que hemos definido funciones continuas $h_1, h_2, \ldots, h_n$ tales que para cada $k \in \{1, \ldots, n\}$ se cumple

$$f_1 - \left(\frac{2}{3}\right)^k \leq h_k \leq f_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^k \quad \text{y} \quad ||h_k - h_{k-1}||_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^k \tag{2.1}$$

como $f_1 \leq h_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $h_n \leq f_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^n$ y $f_1 \leq f_2$ tenemos que

$$f_1 \vee h_n \leq (f_2 \wedge h_n) + \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

es decir

$$(f_1 \vee h_n) - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq (f_2 \wedge h_n) + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

por los comentarios previos a este teorema se tiene que la función $f_1 \vee h_n$ es semicontinua superiormente y $f_2 \wedge h_n$ es semicontinua inferiormente, haciendo uso nuevamente de la afirmación, podemos encontar una función continua h_{n+1} tal que

$$(f_1 \vee h_n) - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq h_{n+1} \leq (f_2 \wedge h_n) + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

por lo tanto

$$f_1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq h_{n+1} \leq f_2 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

y

$$||h_{n+1} - h_n||_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

construida de esta forma se tiene que la sucesión $\{h_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en el espacio $C_b(X)$, por lo que converge a una función continua f, además (2.1) garantiza que $f_1 \leq f \leq f_2$

□

Definición 2.1.3. *Sea X un espacio topológico, si $f \in \mathbb{R}^X$ y $x_0 \in X$, se define la oscilación de f en x_0 como*

$$\operatorname{osc}(f, x_0) = \inf_{U \in \mathscr{V}_{x_0}} \left(\sup\{|f(z) - f(y)| : z, y \in U\} \right)$$

donde $\mathscr{V}_{x_0}$ es el conjunto de entornos de x_0 en el espacio topológico X, además se define la oscilación de f en X como

$$\operatorname{osc}(f) = \sup_{x\in X} \operatorname{osc}(f,x)$$

definamos la distancia entre f y el espacio $C(X)$ como

$$d(f,C(X)) = \operatorname{ínf}\{||f-g||_\infty : g \in C(X)\}$$

por último si $L \subseteq \mathbb{R}$ se define el diametro de L como

$$\operatorname{diam}(L) = \sup\{|x-y| \ : \ x,y \in L\}.$$

El siguiente Teorema muestra la relación existente entre la oscilación de una función $f \in \mathbb{R}^X$ y su distancia al espacio $C(X)$, suponiendo que X es un espacio normal.

Teorema 2.1.4. *Sea X un espacio normal y f una función real definida en X, entonces se cumple que*

$$d(f,C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$$

Demostración: Probemos primero que $d(f,C(X)) \geq \frac{1}{2}osc(f)$, pongamos $d = d(f,C(X))$ y supongamos que d es finito. Sea $\varepsilon > 0$ y $x \in X$, por definición de d existe $g \in C(X)$ tal que $||f-g|| \leq d + \frac{\varepsilon}{3}$, sea U un abierto en X conteniendo a x tal que $\operatorname{diam}(g(U)) < \frac{\varepsilon}{3}$, entonces si $y,z \in U$ se cumple que

$$|f(y)-f(z)| \leq |f(y)-g(y)| + |g(y)-g(z)| + |g(z)-f(z)| < 2d+\varepsilon$$

obteniendo así que $\operatorname{osc}(f,x) \leq 2d+\varepsilon$ para un ε positivo arbitrario, en consecuencia $\operatorname{osc}(f,x) \leq 2d$, como esto último es cierto para un x arbitrario en X se cuncluye que $\operatorname{osc}(f) \leq 2d$.

Probemos ahora que $d(f,C(X)) \leq \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$, pongamos $\delta = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$ y supongamos además que δ es finito, para cada $x \in X$ denotemos por $\mathscr{U}_x$ al conjunto de abiertos en X conteniendo a x y denotemos

$$\mathscr{V}_x = \{U \in \mathscr{U}_x \ : \ \operatorname{diam}(f(U)) < \operatorname{osc}(f)+1\}$$

es claro que $\mathscr{V}_x$ es una base de entornos de x, además para cada $U \in \mathscr{V}_x$, $f\mid_U$ está acotado inferior y superiormente, así

$$\begin{aligned} 2\delta \geq \operatorname{osc}(f,x) &= \operatorname{ínf}_{U\in\mathscr{U}_x}\operatorname{diam}(f(U)) = \operatorname{ínf}_{U\in\mathscr{V}_x} diam(f(U)) \\ &= \operatorname{ínf}_{U\in\mathscr{V}_x}\sup\{|f(z)-f(y)|\ :\ z,y\in U\} \\ &\geq \operatorname{ínf}_{U,V\in\mathscr{V}_x}\sup\{f(z)-f(y)\ :\ y\in U \text{ y } z\in V\} \\ &= \operatorname{ínf}_{U\in\mathscr{V}_x}\sup\{f(y)\ :\ y\in U\} - \sup_{V\in\mathscr{V}_x}\operatorname{ínf}\{f(z)\ :\ z\in V\} \end{aligned}$$

si ahora definimos

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \operatorname{ínf}_{U\in\mathscr{V}_x}\sup\{f(z)\ :\ z\in U\} - \delta \\ f_2(x) &= \sup_{U\in\mathscr{V}_x}\operatorname{ínf}\{f(z)\ :\ z\in U\} + \delta \end{aligned}$$

tenemos que $f_1 \leq f_2$, además es sencillo chequear que f_1 es semicontinua superiormente y f_2 es semicontinua inferiormente, por lo que el Teorema 2.1.2 asegura la existencia de una función continua $h \in \mathbb{R}^X$ tal que

$$f_1(x) \leq h(x) \leq f_2(x) \quad \text{para cada } x \in X$$

obteniendo así que

$$h(x)-\delta \leq f_2(x)-\delta \leq f(x) \leq f_1(x)+\delta \leq h(x)+\delta \quad \text{para cada } x \in X$$

por lo tanto $||f-h||_\infty \leq \delta$ y así se concluye que $d(f,C(X)) \leq \delta$.

□

El siguiente Corolario nos da otras dos caracterizaciones de los espacios normales.

Corolario 2.1.5. *Sea X un espacio topológico, las siguientes afirmaciones son equivalentes*

$i)$ *X es normal*

ii) *Para cada par de funciones $f_1, f_2 \in \mathbb{R}^X$ con $f_1 \leq f_2$, f_1 semicontinua superiormente y f_2 es semicontinua inferiormente, existe una función continua $f \in \mathbb{R}^X$ tal que*

$$f_1(x) \leq f(x) \leq f_2(x) \quad \textit{para cada } x \in X$$

iii) *Para cada función $f \in \mathbb{R}^X$ se tiene que*

$$d(f, C(X)) = \frac{1}{2}\operatorname{osc}(f)$$

Demostración: *i)* $\Rightarrow$ *ii)* es justamente el Teorema 2.1.2, así como *i)* $\Rightarrow$ *iii)* lo da el Teorema 2.1.4.

Mostremos *ii)* $\Rightarrow$ *i)* haciendo uso del Lema de Urysohn (Corolario 1.3.8). Sean A y B subconjuntos cerrados y disjuntos de X, de esta forma se tiene que

$$\chi_B \leq \chi_{X \setminus A}$$

note que al tomar $\alpha \in \mathbb{R}$ se tiene que

$$\chi_B^{-1}((-\infty, \alpha)) = \begin{cases} \emptyset & si \quad \alpha \leq 0 \\ X \setminus B & si \quad 0 < \alpha \leq 1 \\ X & si \quad \alpha > 1 \end{cases}$$

y

$$\chi_{X \setminus A}^{-1}((\alpha, \infty)) = \begin{cases} \emptyset & si \quad \alpha \leq 1 \\ X \setminus B & si \quad 0 \leq \alpha < 1 \\ X & si \quad \alpha < 0 \end{cases}$$

lo que implica que χ_B es semicontinua superiormente y $\chi_{X \setminus A}$ es semicontinua inferiormente, por lo que existe una función continua $f \in \mathbb{R}^X$ tal que

$$\chi_B \leq f \leq \chi_{X \setminus A}$$

y por lo tanto $f(B) \subseteq \{1\}$ y $f(A) \subseteq \{0\}$.

Ahora mostremos $iii) \Rightarrow i)$ Sean A y B subconjuntos cerrados y disjuntos en X y consideremos la función

$$f = \chi_A - \chi_B = \begin{cases} 1 & si \quad x \in A \\ 0 & si \quad x \in X \setminus (A \cup B) \\ -1 & si \quad x \in B \end{cases}$$

veamos que $osc(f) \leq 1$.

- Si $x \in X \setminus (A \cup B)$ por ser $X \setminus (A \cup B)$ abierto se tiene que $\operatorname{osc}(f, x) = 0$ (pues $f\,|_{X \setminus (A \cup B)} = 0$)
- Si $x \in A \subseteq X \setminus B$ tenemos que $\operatorname{osc}(f, x) \leq \operatorname{diam}(f(X \setminus B)) \leq 1$
- Si $x \in B \subseteq X \setminus A$ de igual forma se tine que $\operatorname{osc}(f, x) \leq \operatorname{diam}(f(X \setminus A)) \leq 1$

Así por hipótesis exista una función continua $g \in \mathbb{R}^X$ tal que

$$||f - g||_\infty \leq \frac{1}{2} < 1$$

por otra parte, si $x \in A$ se tiene que

$$g(x) \geq f(x) - |g(x) - f(x)| > 1 - 1 = 0$$

de la misma manera si $x \in B$ se cumple que $g(x) < 0$, obteniendo así que

$$A \subseteq g^{-1}((0, +\infty)) \quad \text{y} \quad B \subseteq g^{-1}((-\infty, 0))$$

$\square$

2.2. Compacidad en el Teorema del punto fijo de Brouwer.

En esta sección X denotará un espacio de Banach con norma $|| \cdot ||$ y $\mathbf{B}$ representará a la bola $\{x \in X : ||x|| \leq 1\}$.

Posiblemente el teorema del punto fijo más importante sea el teorema del punto fijo de Brouwer.

Teorema (Teorema del punto fijo de Brouwer). *Si X es un espacio de Banach, tal que la bola $\mathbf{B}$ es compacta y $f : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ es una función continua, entonces f tiene un punto fijo, es decir, existe $x \in \mathbf{B}$ tal que $f(x) = x$.*

La condición de compacidad sobre la bola $\mathbf{B}$ no solamente es una condición suficiente para garantizar la existencia de un punto fijo de una función continua $f \in \mathbf{B}^{\mathbf{B}}$ sino también es necesaria y esto puede demostrarse haciendo uso del teorema de extensión de Tietze, como lo veremos a continuación.

Teorema 2.2.1. *Si X es un espacio de Banach tal que la bola $\mathbf{B}$ no es compacta, entonces existe una función $g : \mathbf{B} \to \mathbf{B}$ tal que f es continua y la ecuación $g(x) = x$ no la satisface ningún elemento en $\mathbf{B}$.*

Demostración: La demostración de este resultado esta basada en la siguiente afirmación.
Afirmación: Existe un subconjunto C de $\mathbf{B}$ que es cerrado en $\mathbf{B}$ y homeomorfo a $\mathbb{R}$.

Partiendo de esta afirmación podemos considerar un homeomorfismo $f : C \to \mathbb{R}$, así por el teorema de extensión de Tietze (1.3.6) podemos afirmar que existe una función continua $F : \mathbf{B} \to \mathbb{R}$ tal que $F|_C = f$, sea $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua sin punto fijo (como por ejemplo $r(x) = x + 1$), de este modo la función $g = f^{-1} \circ r \circ F$ esta en $\mathbf{B}^{\mathbf{B}}$ y es continua, además si $z \in \mathbf{B}$, necesariamente $g(z)$ está en C, por lo que si suponemos que $g(z) = z$ tendríamos que $r(F(z) = f(z) = F(z)$, lo cual contradice el hecho de que la función r no tiene punto fijo, por lo tanto la función g no tiene punto fijo.

Ahora demostremos la afirmación. Ya que $\mathbf{B}$ no es totalmente acotado (pues $\mathbf{B}$ es completo y no es compacto) existe $\delta_0 > 0$ tal que

$$\mathbf{B} \not\subseteq \bigcup_{x \in L} B_{||\cdot||}(x, \delta_0) \quad \text{para cualquier } L \subset \mathbf{B} \text{ finito} \tag{2.2}$$

consideremos la sucesión $\phi \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ definida por

$$\phi(n) = \begin{cases} (-1)^n \dfrac{n-1}{2} & si \quad \text{n es impar} \\ \\ (-1)^n \dfrac{n+1}{2} & si \quad \text{n es impar} \end{cases}$$

Definamos $x_{\phi(1)} = 0$, por (2.2) podemos encontrar $x_{\phi(2)} \in \mathbf{B}$ tal que

$$||x_{\phi(2)}|| \geq \frac{\delta_0}{2}$$

supongamos que hemos definido $x_{\phi(1)}, \ldots, x_{\phi(n)} \in \mathbf{B}$ tales que

$$d(x_{\phi(j)}, span\left\{x_{\phi(i)} : i < j\right\} \cap \mathbf{B}) \geq \frac{\delta_0}{2} \quad \text{para cada } \; j < n$$

ya que el conjunto $T := span\left\{x_{\phi(i)} : i < n\right\} \cap \mathbf{B}$ es compacto, se tiene que existen $t_1, \ldots, t_r \in T$ tales que

$$T \subset \bigcup_{i=1}^{r} B_{||\cdot||}(t_i, \frac{\delta_0}{2})$$

haciendo uso nuevamente de (2.2) podemos fijar $x_{\phi(n+1)} \in \mathbf{B} \setminus \bigcup_{i=1}^{r} B_{||\cdot||}(t_i, \delta_0)$, luego si $y \in T$, existirá $p \in \{1, \ldots, r\}$ tal que $y \in B_{||\cdot||}(t_p, \frac{\delta_0}{2})$, por lo tanto se tiene que

$$||x_{\phi(n+1)} - y|| \geq ||x_{\phi(n+1)} - t_p|| - ||t_p - y|| \geq \delta_0 - \frac{\delta_0}{2} = \frac{\delta_0}{2}$$

por lo tanto

$$d(x_{\phi(n+1)}, span\left\{x_{\phi(i)} : i < n+1\right\} \cap \mathbf{B}) \geq \frac{\delta_0}{2}$$

Si $\delta = \frac{\delta_0}{2}$ tendríamos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ esta en $\mathbf{B}$ y satisface lo siguiente

$$d(x_n, span\{x_i : |i| \leq |n|, i \neq n\} \cap \mathbf{B}) \geq \delta \quad \text{para cada } \; n \in \mathbb{Z} \tag{2.3}$$

para cada $n \in \mathbb{Z}$ definamos

$$[x_n, x_{n+1}] = \{t x_{n+1} + (1-t)x_n : t \in [0,1]\}$$

y

$$C = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} [x_n, x_{n+1}] \subset \mathbf{B}$$

Veamos que el conjunto C es cerrado en X [1] (y por lo tanto también lo será en $\mathbf{B}$), sea $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en C convergente, para demostrar que el límite de dicha sucesión está en C basta con asegurar la existencia de un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \bigcup_{|n|\leq n_0} [x_n, x_{n+1}]$$

y esto es consecuencia de lo siguiente

$$d([x_i,x_{i+1}],[x_j,x_{j+1}]) \geq \frac{\delta^2}{1+2\delta} \quad \text{para cada } \ i,j\in\mathbb{Z} \ \text{ con } \ i+1<j$$

para mostrar esto último consideremos $i, j \in \mathbb{Z}$ con $i+1 < j$, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $0 \leq i+1$, si $x \in [x_i, x_{i+1}]$ y $y \in [x_j, x_{j+1}]$, existirán $\lambda, \beta \in [0,1]$ tales que

$$x = \lambda x_{i+1} + (1-\lambda)x_i \quad \text{y} \quad y = \beta x_{j+1} + (1-\beta)x_j$$

Queremos mostrar que $||y-x|| \geq \dfrac{\delta^2}{1+2\delta}$, por (2.3) podemos suponer que $\beta \in (0,1)$, de este modo tendríamos que

$$\left\|\frac{y-x}{\beta}\right\| = \left\|x_{j+1} - \left(-\frac{1-\beta}{\beta}x_j + \frac{\lambda}{\beta}x_{i+1} + \frac{1-\lambda}{\beta}x_i\right)\right\| \geq \delta$$

y

$$\left\|\frac{y-x-\beta x_{j+1}}{1-\beta}\right\| = \left\|x_j - \left(\frac{\lambda}{1-\beta}x_{i+1} + \frac{1-\lambda}{1-\beta}x_i\right)\right\| \geq \delta$$

por lo tanto

$$||y-x|| \geq \beta\delta$$

y

$$||y-x|| \geq ||y-x-\beta x_{j+|}|| - ||\beta x_{j+1}|| \geq (1-\beta)\delta - \beta$$

[1]La prueba de esto fue proporcionada por el compañero Antonio Perez

y así $\|y-x\| \geq \text{máx}\{\beta\delta, (1-\beta)\delta - \beta\} \geq \dfrac{\delta^2}{1+2\delta}$

Ahora definamos $h : \mathbb{R} \to C$ como

$$h(t) = (t-n)x_{n+1} + (1+n-t)x_n \quad \text{si} \quad n \leq t < n+1$$

obviamente la función h es sobreyectiva y (2.3) garantiza que

$$(x_n, x_{n+1}) \cap (x_m, x_{m+1}) = \emptyset \quad \text{si} \quad n, m \in \mathbb{Z}, \ n \neq m$$

lo que implica que h es inyectiva, la continuidad de h y h^{-1} se chequea con facilidad.

$\square$

2.3. Lema tipo Urysohn para Álgebras uniformes con unidad.

En esta sección K denotara un espacio compacto y Hausdorff, $C(K)$ representara al álgebra de las funciones complejas y continuas definidas en K, el cual consideraremos como espacio de Banach, con respecto a la norma del supremo.

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(z)| \ : \ z \in K\} \qquad (f \in C(K)).$$

Diremos que $A \subset C(K)$ es un **álgebra uniforme con unidad** si A es un cerrado en $C(K)$ que contiene a la función constate e igual a **1** y además satisface lo siguiente

$$\lambda f + g, fg \in A \qquad \text{para cada} \quad f, g \in A \ \text{ y } \ \lambda \in \mathbb{C}.$$

Si $A \subset C(K)$ es un álgebra uniforme con unidad, denotaremos por A^* al dual topológico de A. Para cada $t \in K$ definimos $\delta_t \in A^*$ como

$$\delta_t(f) = f(t) \qquad \text{para cada} \quad f \in A.$$

Definimos además los conjuntos $K(A)$ y $Ch(A)$ como sigue

$$K(A) = \{x^* \in A^* \,:\, \|x^*\| = 1,\; x^*(\mathbf{1}) = 1\}$$

y

$$Ch(A) = \{t \in K \,:\, \delta_t \in \mathrm{ext}(K(A))\}$$

donde $\mathrm{ext}(K(A))$ denota al conjunto de puntos extremales de $K(A)$. El conjunto $Ch(A)$ es conocido como la **frontera de Choquet** de A, vèase [4] para la noción de punto extremal y a su vez como referencia para álgebras uniformes.

Definición 2.3.1. *Si $\varepsilon \in (0,1)$ definimos la* ***región de Stolz*** *como*

$$St_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| + (1-\varepsilon)|1-z| \leq 1\}$$

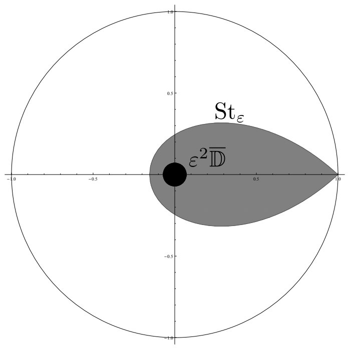


Figura 2.1: Region de Stolz

Cuando se trabaja con un álgebra $A \subset C(K)$ uniforme y con unidad, resulta bastante interesante, saber si dado un abierto $U \subset K$ y un punto x_0 en el cerrado $K \setminus U$, existe una función $f \in A$ que separa a los cerrados $\{x_0\}$ y $K \setminus U$, es decir, f satisface que:

a) $f(K) \subset [0,1]$;

b) $f(x_0) = 1$;

c) $f(K \setminus U) = \{0\}$.

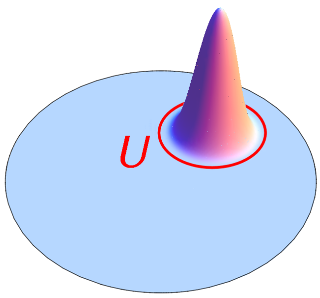


Figura 2.2: Función bump f

Aunque el lema de Urysohn garantiza que dicha función existe en el caso de que el álgebra A es igual a $C(K)$, resulta que, esto no necesariamente ocurre si $A \neq C(K)$, como ejemplo de este hecho, consideremos el álgebra del disco

$$A(\mathbb{D}) = \{f \in C(\overline{\mathbb{D}}) : f \quad \text{es analitica en} \quad \mathbb{D}\}$$

$A(\mathbb{D})$ es un álgebra uniforme del espacio $C(\overline{\mathbb{D}})$, en el caso de que x_0 sea un punto de la frontera del disco $\mathbb{D}$ y $U = B(x_0, 1) \cap \overline{\mathbb{D}}$, se tiene que, cualquier función $f \in A(\mathbb{D})$ tal que $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset [0,1]$ necesariamente tiene que ser una función constante, por ende no existe una función en $A(\mathbb{D})$ que separe a los cerrados $\{x_0\}$ y $\overline{\mathbb{D}} \setminus U$. Sin embargo, dado un $\delta > 0$ arbitrario, es posible encontrar $t_0 \in U$ y $f \in A(\mathbb{D})$ tal que

a) $f(\overline{\mathbb{D}}) \subset \overline{\mathbb{D}}$;

b) $f(x_0) = 1$;

c) $f(K \setminus U) \subset \delta\mathbb{D}$.

Esta propiedad aunque es mas débil, es necesaria por sus aplicaciones. La afirmación anterior es consecuencia del lema 2.1 en [2], el cual enunciamos a continuación.

Lema 2.3.2. *Sea $A \subset C(K)$ un álgebra uniforme con unidad. Entonces, para cada abierto $U \subset K$ tal que $U \cap Ch(A) \neq \emptyset$ y $\delta > 0$, existe una función $f_\delta \in A$ y $t_0 \in U \cap Ch(A)$ tal que*

$$\|f_\delta\|_\infty = f_\delta(t_0) = 1 \quad y \quad f_\delta(K \setminus U) \subset \delta\mathbb{D}$$

Dedicaremos esta sección a estudiar un resultado aún más general, también demostrado en [2], el cual enunciamos a continuación.

Lema 2.3.3. *Sea $A \subset C(K)$ un álgebra uniforme con unidad. Entonces, para cada abierto $U \subset K$ tal que $U \cap Ch(A) \neq \emptyset$ y $\varepsilon \in (0,1)$, existe una función $f \in A$ y $t_0 \in U \cap Ch(A)$ tal que*

i) $\|f\|_\infty = f(t_0) = 1$;

ii) $f(K \setminus U) \subset \varepsilon\mathbb{D}$;

iii) $f(K) \subset St_\varepsilon$.

Para la demostración de este lema, es necesario conocer algunas propiedades de la región de Stolz, las cuales exponemos en la proposición 2.3.4.

Si $\varepsilon \in (0,1)$ definimos $g_\varepsilon : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como

$$g_\varepsilon(z) = |z| + (1-\varepsilon)|1-z| \quad (z \in \mathbb{C})$$

La continuidad de la función g_ε asegura que el conjunto

$$\Omega_\varepsilon = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| + (1-\varepsilon)|1-z| < 1\}$$

es abierto.

Proposición 2.3.4. *Para cada $\varepsilon \in (0,1)$ se cumplen las siguientes afirmaciones*

i) Ω_ε *es un conjunto abierto y convexo;*

ii) $\overline{\Omega_\varepsilon} = St_\varepsilon$;

iii) $\varepsilon^2\mathbb{D} \subset \Omega_\varepsilon$.

Demostración: *i)* Ω_ε es abierto, como lo hemos mencionado al definirlo, veamos que Ω_ε es convexo, sean $z_1, z_2 \in \Omega_\varepsilon$ y $\lambda \in [0,1]$, pongamos $z = \lambda z_1 + (1-\lambda)z_2$, de esta forma tenemos que

$$\begin{aligned}
|z|+(1-\varepsilon)|1-z| &= |\lambda z_1+(1-\lambda)z_2|+(1-\varepsilon)|1-(\lambda z_1+(1-\lambda)z_2)| \\
&\leq \lambda|z_1|+(1-\lambda)|z_2|+(1-\varepsilon)(|\lambda-\lambda z_1|+|(1-\lambda)(1-z_2)|) \\
&= \lambda(|z_1|+(1-\varepsilon)|1-z_1|)+(1-\lambda)(|z_2|+(1-\varepsilon)|1-z_2|) \\
&< \lambda+(1-\lambda)=1
\end{aligned}$$

esto demuestra que $\lambda z_1+(1-\lambda)z_2 \in \Omega_\varepsilon$

ii) ya que $St_\varepsilon = g_\varepsilon^{-1}([0,1])$ es cerrado y $\Omega_\varepsilon \subset St_\varepsilon$, se tiene que $\overline{\Omega_\varepsilon} \subset St_\varepsilon$, por lo que quedaría por demostrar que $St_\varepsilon \subset \overline{\Omega_\varepsilon}$. Sea $z \in St_\varepsilon$, para ver que $z \in \overline{\Omega_\varepsilon}$ bastará con demostrar que

$$tz \in \Omega_\varepsilon \qquad \text{para cada} \qquad t \in (0,1)$$

ya que de ocurrir esto último, tendríamos que la sucesión $\left\{\dfrac{n}{n+1}z\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ está en Ω_ε y en consecuencia

$$z = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}z \in \overline{\Omega_\varepsilon}$$

Si $t \in (0,1)$ entonces

$$\begin{aligned}
|tz|+(1-\varepsilon)|1-tz| &\leq t|z|+(1-\varepsilon)(|1-z|+|z-tz|) \\
&= |z|(t+(1-\varepsilon)(1-t))+(1-\varepsilon)|1-z| \\
&< |z|(t+(1-t))+(1-\varepsilon)|1-z| \\
&\leq 1
\end{aligned}$$

lo que implica que $tz \in \Omega_\varepsilon$.

iii) Si $z \in \varepsilon^2\mathbb{D}$, entonces

$$|z|+(1-\varepsilon)|1-z| < \varepsilon^2+(1-\varepsilon)(1+\varepsilon^2) < \varepsilon^2+(1-\varepsilon)(1+\varepsilon) = 1$$

□

El siguiente teorema es consecuencia de los teorema 14.8 y 14.9 de [10].

Teorema 2.3.5. *Si Ω es un conjunto abierto y convexo de $\mathbb{C}$ y $x_0 \in \Omega$, existe un homeomorfismo $f : \mathbb{D} \to \Omega$ tal que*

i) *f es analítica en $\mathbb{D}$*

ii) *$f'(z) \neq 0$ para cada $z \in \mathbb{D}$ (f en un mapeo conforme)*

iii) *$f(0) = x_0$*

Si además $x_1 \in \overline{\Omega} \backslash \Omega$ y $|z| = 1$, se puede encontrar un homeomorfismo $F : \overline{\mathbb{D}} \to \overline{\Omega}$ tal que $F(z) = x_1$ y $F|_{\mathbb{D}} = f$.

Observación: Gracias al teorema anterior podemos garantizar la existencia de un homeomorfismo $\phi_\varepsilon : \overline{\mathbb{D}} \to St_\varepsilon$ satisfaciendo lo siguiente

i) ϕ_ε restringido a $\mathbb{D}$ es un mapeo conforme y $\phi_\varepsilon(\mathbb{D}) = \Omega_\varepsilon$

ii) $\phi_\varepsilon(0) = 0$

iii) $\phi_\varepsilon(1) = 1$

Por otra parte, el teorema de aproximación de Mergalyan (ver teorema 20.5 en [10]) asegura que, existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definidos en el disco $\overline{\mathbb{D}}$, que converge uniformemente a ϕ_ε, luego si $A \subset C(K)$ es un álgebra uniforme con unidad y $f \in A$, es claro que

$$P_n \circ f \in A \qquad \text{para cada} \quad n \in \mathbb{N}$$

Luego, por ser A cerrado en $C(K)$ se cumple que $\phi_\varepsilon \circ f \in A$, pues $\phi_\varepsilon \circ f$ es el límite uniforme en K de la sucesión de funciones $\{P_n \circ f\}_{n\in\mathbb{N}}$

Demostracion del lema 2.3.2 : Supongamos que $A \subset C(K)$ es un álgebra uniforme con unidad y supongamos que U es un abierto en K tal que $U \cap Ch(A) \neq \emptyset$. Sea $\varepsilon \in (0,1)$ y $\phi_\varepsilon : \overline{\mathbb{D}} \to St_\varepsilon$ como en la observación previa, la proposición 2.3.4 asegura que

$$\varepsilon^2 \mathbb{D} \subset \Omega_\varepsilon$$

por lo tanto $\phi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon^2\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$. Ya que $\phi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon^2\mathbb{D})$ es un abierto que contiene a 0, se tiene que existe $\delta > 0$ tal que

$$\delta\mathbb{D} \subset \phi_\varepsilon^{-1}(\varepsilon^2\mathbb{D})$$

Por el Lema 2.3.2 podemos fijar $f_\delta \in A$ y $t_0 \in U \cap Ch(A)$ tales que

$$\|f_\delta\|_\infty = f_\delta(t_0) = 1 \quad \text{y} \quad f_\delta(K \setminus U) \subset \delta\mathbb{D}$$

De esta forma tiene sentido definir la función $f := \phi_\varepsilon \circ f_\delta : K \to St_\varepsilon$, que por la observación previa podemos asegurar que $f \in A$, además

$$f(K) = \phi_\varepsilon(f_\delta(K)) \subset \phi_\varepsilon(\overline{\mathbb{D}}) \subset St_\varepsilon \subset \mathbb{D}$$

y

$$f(t_0) = \phi_\varepsilon(f_\delta(t_0)) = \phi_\varepsilon(1) = 1$$

Lo que implica que $\|f\|_\infty = f(t_0) = 1$, solo queda mostrar que $f(K \setminus U) \subset \varepsilon\mathbb{D}$, esto es sencillo de ver

$$f(K \setminus U) \subset \phi_\varepsilon(f_\delta(K \setminus U) \subset \phi_\varepsilon(\delta\mathbb{D}) \subset \varepsilon^2\mathbb{D} \subset \varepsilon\mathbb{D}$$

$\square$

Vale destacar, que el lema 2.3.2 esta siendo aplicado para obtener nuevos resultados interesantes en el análisis funcional (ver [3]), una primera aplicación (ver teorema 3.6 en [2]) está dada en el mismo articulo en que este fue demostrado , el cual tiene como consecuencia directa el siguiente resultado, en el que c_0 denota el espacio de Banach de las sucesiones complejas nulas dotado de la norma del supremo.

Teorema 2.3.6. *Sea $T : c_o \to A(\mathbb{D})$ un operador con $\|T\| = 1$. Si $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ y $x_0 \in c_0$ con $\|T(x_0)\| > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$, entonces existe un operado $S : c_0 \to A(\mathbb{D})$ y $u_0 \in c_0$ con $\|u_0\| = 1$ tales que:*

i) $\|S\| = \|S(u_0\| = 1$

ii) $\|S - T\| < 2\varepsilon$

iii) $\|x_0 - u_0\| < \varepsilon$

Este resultado pone de manifiesto por primera vez los operadores en $L(c_0, A(\mathbb{D}))$ pueden aproximares por operadores que alcanzan la norma.

Capítulo 3

Criterio de densidad y aplicaciones de extensión

«CONTENIDOS»

- Criterio de densidad de Urysohn.
- Demostración del Teorema de Stone - Weierstrass.
- Extensión de funciones en espacios metricos.

EN este capìtulo X denotará un espacio topológico y $C_b^{\mathbb{R}}(X)$ al espacio vectorial de las funciones reales y continuas definidas en X y acotadas, al cual dotaremos con la norma de supremo

$$||f||_\infty = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in X\} \qquad (f \in C_b^{\mathbb{R}}(X)).$$

Las principales referencias para la elaboración de este capítulo son: [4], [9], [11].

3.1. Criterio de densidad de Urysohn para subespacios vectoriales en $C_b^{\mathbb{R}}(X)$.

El Lema de Urysohn nos asegura que para cada par de subconjuntos cerrados y disjuntos A, B de un espacio X, se puede encontrar una función $f \in C_b^{\mathbb{R}}(X)$ tal que:

$$f(A) \subseteq \{0\}, \ \ f(B) \subseteq \{1\} \ \text{ y } \ f(X) \subseteq [0,1].$$

claro esto ocurre siempre y cuando X sea un espacio normal, diciendo así que esta es una propiedad que tiene el espacio X o en todo caso el espacio $C_b^{\mathbb{R}}(X)$, pudiéndonos preguntar:

¿Que pasaría si esta propiedad la tuviese una familia en $C_b^{\mathbb{R}}(X)$?

es decir, si $\mathscr{U}$ es una colección de funciones en $C_b^{\mathbb{R}}(X)$ que satisface la siguente propiedad:

(u) Para cada par de subconjuntos cerrados y disjuntos $A, B \subseteq X$, existe $f \in \mathscr{U}$ tal que

$$f(A) \subseteq \{0\},\ \ f(B) \subseteq \{1\}\ \text{ y }\ f(X) \subseteq [0,1]$$

Obviamente si dicha colección $\mathscr{U}$ existiese tendría que ser X necesariamente un espacio normal, por otra parte, esta propiedad (u) sobre una colección $\mathscr{U}$ no es ni de lejos una condición suficiente para asegurar la densidad de esta familia en el espacio $C_b^{\mathbb{R}}(X)$, sin embargo, si suponemos además que $\mathscr{U}$ es un subespacio vectorial de $C_b^{\mathbb{R}}(X)$ resulta que $\mathscr{U}$ necesariamente es denso en $C_b^{\mathbb{R}}(X)$ y curiosamente la desmostración de esta afirmación se encuentra "escondida" en las demostraciones del Teorema de Tietze (2.3.6) y su lema previo (2.3.5).

Definición 3.1.1. *Diremos que una familia $\mathscr{U} \subseteq C_b^{\mathbb{R}}(X)$ satisface la condición de Urysohn si satisface la condicón (u).*

Una observación previa al siguiente lema es que la condición de Urysohn garantiza que la familia $\mathscr{U}$ contiene a la función constante e igual a 1.

Lema 3.1.2. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{U} \subseteq C_b^{\mathbb{R}}(X)$ un subespacio vectorial que sastiface la propiedad de Urysohn, entonces se cumple lo siguiente:*

Para cada $f \in C_b^{\mathbb{R}}(X)$ existe una función $g \in \mathscr{U}$ tal que

$$||f-g||_\infty \leq \frac{2}{3}||f||_\infty \tag{3.1}$$

Demostración: Sea $f \in C_b^{\mathbb{R}}(X)$ una función no constante y fijemos

$$\alpha = \text{ínf}\{f(x)\ :\ x \in X\},\ \ \beta = \sup\{f(x)\ :\ x \in X\}\ \text{ y }\ \gamma = \frac{\beta-\alpha}{3}$$

definamos además los conjuntos

$$A = f^{-1}([\alpha, \alpha+\gamma])\ :\ \beta = f^{-1}([\beta-\gamma, \beta])$$

por como hemos definido α y β tenemos que

$$f(X) \subseteq [\alpha,\beta] \text{ y } ||f||_\infty = \text{máx}\{|\alpha|,|\beta|\}$$

además, la continuidad de f nos asegura que A y B son subconjuntos cerrados de X y también disjuntos, aplicando la hipótesis a este par de conjuntos podemos fijar $f_0 \in \mathscr{U}$ tal que

$$f_0(A) \subseteq \{0\}, \ f_0(B) \subseteq \{1\} \text{ y } f_0(X) \subseteq [0,1]$$

así podemos garantizar que la función

$$g \equiv (\alpha+\gamma)1 + \gamma f_0$$

esta también en $\mathscr{U}$.

para mostrar que se cumple (3.1) bastará con mostrar que

$$|f(x) - g(x)| < \gamma \quad \forall x \in X$$

(pues $\gamma = \dfrac{\beta-\alpha}{3} \leq \dfrac{|\alpha|+|\beta|}{3} \leq \dfrac{2}{3}\text{máx}\{|\alpha|,|\beta|\} = \dfrac{2}{3}||f||_\infty$).

Si $x \in X$ entonces

- Si $x \in A \Rightarrow \begin{cases} f_0(x) = 0 \\ \alpha \leq f(x) \leq \alpha+\gamma \end{cases} \Rightarrow \ -\gamma \leq f(x) - g(x) \leq 0$
- Si $x \in B \Rightarrow \begin{cases} f_0(x) = 1 \\ \beta-\gamma \leq f(x) \leq \beta \end{cases} \Rightarrow \ 0 \leq f(x) - g(x) \leq \beta - \alpha - 2\gamma = \gamma$
- Si $x \notin A \cup B \Rightarrow \begin{cases} \alpha+\beta < f(x) < \beta-\gamma \\ \alpha+\gamma \leq g(x) \leq 2\gamma+\alpha \end{cases} \Rightarrow \ -\gamma < f(x) - g(x) < \gamma$

□

Teorema 3.1.3. *(Criterio de densidad de Urysohn)*

Bajo las hipótesis del Lema 3.1.2 se tiene que $\mathscr{U}$ es una familia densa en $C_b^{\mathbb{R}}(X)$.

Demostración: Sea f una función continua en $C_b^{\mathbb{R}}(X)$ y definamos de manera recursiva dos sucesiones $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_b^{\mathbb{R}}(X)$ y $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}$.

Para $n = 1$ definimos $f_1 := 1$ y por lema anterior fijemos $g_1 \in \mathscr{U}$ tal que

$$||f_1 - g_1||_\infty \leq 2/3||f_1||_\infty$$

suponiendo que hemos definido $f_1,\ldots,f_n \in C_b^{\mathbb{R}}(X)$ y $g_1,\ldots,g_n \in \mathscr{U}$ se define

$$f_{n+1} := f_n - g_n \in C_b^{\mathbb{R}}(X) \text{ y escogemos } g_{n+1} \in \mathscr{U}$$

tal que

$$||f_{n+1} - g_{n+1}||_\infty \leq \frac{2}{3}||f_{n+1}||_\infty$$

una vez construidas estas sucesiones se llega a que

$$||f_n||_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}||f||_\infty \ \forall n \geq 1 \tag{3.2}$$

consideremos la sucesión de funciones en $\mathscr{U}$ definida por

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} g_i \quad (n \geq 1)$$

haciendo uso de la igualdad $g_n := f_n - f_{n+1}$ se llega a que

$$\begin{aligned} s_n - f &:= g_1 + \cdots + g_n - f \\ &= (f - f_2) + \cdots + (f_n + f_{n+1}) - f = f_{n+1} \end{aligned}$$

luego por (3.2) se tiene que

$$||s_n - f||_\infty \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n}||f||_\infty \quad \forall n \geq 1$$

esta última desigualdad implica que la sucesión $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}$ converge en la norma $||\cdot||_\infty$ a f, quedando así demostrado que $f \in \overline{\mathscr{U}}$.

□

El Teorema de Stone - Weierstrass es uno de los resultados mejor conocidos en el análisis y que puede ser demostrado a partir del criterio de densidad de Urysohn, aunque los argumentos iniciales para esta demostración no escapan por completo de los argumentos usuales encontrados en algunos textos y que están reflejados en los siguientes lemas.

Lema 3.1.4. *Consideremos la función $f_r : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como*

$$f_r(t) = \sqrt{t} \qquad (t \in [0,1])$$

entonces existe una sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ que converge uniformemente a f_r.

Demostración: Definamos de manera recursiva la sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de la siguiente forma

$$P_1 \equiv 0, \; y \; P_{n+1}(t) = P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - P_n(t)^2\right) \;\; \forall n \geq 1 \; \text{ y } \; t \in [0,1] \tag{3.3}$$

note que $0 \leq P_1 \leq f_r$ además si suponemos que $0 \leq P_n \leq f_r$ entonces para cada $t \in [0,1]$ se tiene que

$$\begin{aligned} 0 \leq P_{n+1}(t) &= P_n(t) + \frac{1}{2}\left(t - p_n(t)^2\right) \\ &= P_n(t) + \left(\sqrt{t} - p_n(t)\right)\frac{\sqrt{t} + P_n(t)}{2} \\ &\leq P_n(t) + (\sqrt{t} - p_n(t)) \\ &= f_r(t) \end{aligned}$$

por otra parte, es fácil chequear que

$$0 \leq P_n \leq f_r \Rightarrow P_n \leq P_{n+1} \leq 1$$

esto muestra que para cada $t \in [0,1]$ la sucesión $\{P_n(t)\}_{n\in\mathbb{N}}$ es monótona creciente y acotada (por lo tanto convergente), sea $a = \lim\limits_{n\to\infty} P_n(t) \geq 0$ de (3.3) se deduce que

$$a = a + \frac{1}{2}\left(t - a^2\right)$$

por lo tanto $a^2 = t$ y así concluimos que la sucesión de polinomios $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ converge puntualmente a la función f_r.
Veamos que esta convergencia también es uniforme. Para cada $t \in [0,1]$ existe $n_t \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 \leq f_r(t) - P_{n_t} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.4}$$

ahora por la continuidad de las funciones f_r y P_{n_t} existe un abierto U_t contenido en $[0,1]$ que contiene a t y que sastiface

$$|f_r(s) - f_r(t)| < \frac{\varepsilon}{4} \ : \ |P_{n_t}(s) - P_{n_t}(t)| < \frac{\varepsilon}{4} \ \text{ para cada } \ s \in U_t \tag{3.5}$$

luego de (3.4),(3.5) y la monotonia de la sucesión $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ se deduce que

$$0 \leq f_r(s) - P_{n_t}(s) \leq \varepsilon \ \text{ para cada } \ s \in U_t \ \text{ y } \ n \geq n_t$$

por la compacidad del intervalo $[0,1]$ existen $t_1, \ldots, t_n \in [0,1]$ tales que

$$[0,1] \subseteq U_{t_1} \cup \cdots \cup U_{t_m}$$

tomando $n_0 = \text{máx}\{n_{t_1}, \ldots, n_{t_m}\}$ se obtiene la desigualdad

$$||f_r - P_n||_\infty \leq \varepsilon$$

$\square$

Definición 3.1.5. *Diremos que una colección $\mathscr{U} \subseteq C_b^{\mathbb{R}}(X)$ es una subálgebra si $\mathscr{U}$ es un subespacio vectorial y $f.g \in \mathscr{U}$ para cada $f,g \in \mathscr{U}$ (donde . es el producto usual de funciones).*

Lema 3.1.6. *Sea X un espacio topológico y $\mathscr{U}$ una subálgebra de $C_b^{\mathbb{R}}(X)$ entonces se cumple lo siguiente:*

(i) $\overline{\mathscr{U}}$ *es una subálgebra*
(ii) $|f| \in \overline{\mathscr{U}}$ *para cada* $f \in \overline{\mathscr{U}}$
(iii) $\text{máx}\{f,g\},\ \text{mín}\{f,g\} \in \overline{\mathscr{U}}$ *para cada* $f,g \in \overline{\mathscr{U}}$

Demostración: (i) Sea $f, g \in \overline{\mathscr{U}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{g_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathscr{U}$ sucesiones convergentes a f y g respectivamente, para mostrar que $\lambda f + g, f.g \in \overline{U}$ basta con notar que las sucesiones $\{\lambda f_n + g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{f_n.g_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ están en $\mathscr{U}$ y que además convergen a las funciones $\lambda f + g$ y $f.g$ respectivamente, esto último se deduce de las desigualdades

$$||\lambda f_n + g_n - (\lambda f + g)||_\infty \leq |\lambda|||f_n - f||_\infty + ||g_n - g||_\infty$$

y

$$\begin{aligned} ||f_n g_n - f \cdot g||_\infty &= ||f_n(g_n - g) + g_n(f_n - f) + (f - f_n)(g_n - g)||_\infty \\ &\leq ||f_n||_\infty ||g_n - g||_\infty + ||g_n||_\infty ||f_n - f||_\infty + ||f - f_n||_\infty ||g_n - g||_\infty \end{aligned}$$

Para demostrar (ii) supongamos que f es una función no nula en $\mathscr{U}$, definamos

$$f_0 \equiv f^2 \ \text{ y } \ f_1 \equiv \frac{1}{||f_0||_\infty} f_0$$

Por (i) se tiene que tanto f_0 como f_1 pertenecen a $\overline{\mathscr{U}}$, además $f_1(X) \subseteq [0,1]$. Sea $\{P_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de polinomios como en el Lema 3.1.4 y para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos

$$h_n = P_n \circ f_1$$

es claro que la sucesión $\{h_n\}_n \in \mathbb{N}$ está en $\overline{\mathscr{U}}$ y que además

$$\lim_{n\to\infty} ||h_n - f_r \circ f_1||_\infty = 0$$

por lo tanto $\frac{1}{\sqrt{||f_0||_\infty}}|f| \equiv f_r \circ f_1 \in \overline{\mathscr{U}}$ y así se concluye que $|f|$ està en $\mathscr{U}$

(iii) es consecuencia inmediata de (ii) y (i) gracias a las identidades

$$\text{máx}\{f, g\} \equiv \frac{1}{2}\Big(f + g + |f - g|\Big)$$

y

$$\text{mín}\{f, g\} \equiv \frac{1}{2}\Big(f + g - |f - g|\Big)$$

□

Teorema 3.1.7. *(Stone - Weierstrass)*

Sea K un espacio compacto y Hausdorff, si $\mathscr{U} \subseteq C^{\mathbb{R}}(K)$ es una subálgebra que contiene la función constante e igual a 1 y que separa puntos (i.e. para cada $p,q \in K$ con $p \neq q$ existe $f \in \mathscr{U}$ tal que $f(p) \neq f(q)$) entonces $\mathscr{U}$ es denso en $C^{\mathbb{R}}(K)$

Demostración: La demostración está basada en las siguientes afirmaciones

Afirmación 1: Para cada par de puntos $p,q,\in K$ con $p \neq q$ existe una función $h \in \overline{\mathscr{U}}$ tal que

$$h(p) = 0, \;\; h(q) = 1 \;\; \text{y} \;\; h(K) \subseteq [0,1]$$

por hipótesis existe $f \in \mathscr{U}$ tal que $f(p) \neq f(q)$. Definamos

$$g := \frac{1}{f(q) - f(p)}(f - f(p)1)$$

claramente $g \in \overline{\mathscr{U}}$ y $g(p) = 0 = g(q) - 1$, la función que estamos buscando es

$$h \equiv \text{mín}\{g^2, 1\}$$

que por el lema anterior está en $\overline{\mathscr{U}}$ y además satisface lo requerido.

Afirmación 2: Para cada subconjunto cerrado $A \subseteq K$ no vacío y cada $x \in K \setminus A$ existe una función $h \in \overline{\mathscr{U}}$ tal que

$$h(x) = 0, \;\; h(A) = \{1\} \;\; \text{y} \;\; h(K) \subseteq [0,1]$$

para cada $y \in A$ podemos por la afirmación anterior fijar una función $h_y \in \overline{\mathscr{U}}$ tal que

$$h_y(x) = 0, \;\; h_y(y) = 1 \;\; \text{y} \;\; h_y(K) \subseteq [0,1]$$

sea

$$U_y = h_y^{-1}((0, +\infty))$$

hemos obtenido así el cubrimiento $\{U_y\}_{y \in A}$ del subconjunto compacto A, luego existen $y_1, \ldots, y_n \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{y_i}$$

Definamos $f \equiv \sum_{i=1}^{n} h_{y_i} \in \overline{\mathscr{U}}$, $m = \text{mín}\{f(y) \,:\, y \in A\}$ y $g \equiv \frac{1}{m} f \in \overline{\mathscr{U}}$.
note que $m > 0$ pues $f(x) \subseteq (0, +\infty)$ además $g(K) \subseteq [0, +\infty)$ y $g(A) \subseteq [1, +\infty)$

La función que estamos buscando en este caso es

$$h \equiv \text{mín}\{g, 1\}$$

Afirmación 3: $\overline{\mathscr{U}}$ satisface la colección de Urysohn.
Sean $A, B \subseteq K$ cerrados, disjuntos y no vacíos por la afirmación anterior podemos fijar para cada $x \in A$ una función $h_x \in \overline{\mathscr{U}}$ tal que

$$h_x(x) = 0, \;\; h_x(B) = \{1\} \;\text{ y }\; h_x(K) \subseteq [0, 1]$$

ahora definamos

$$g_x \equiv 1 - h_x \in \overline{\mathscr{U}}$$

note que

$$g_x(x) = 1, \;\; g_x(B) = \{0\} \;\text{ y }\; g_x(K) \subseteq [0, 1] \tag{3.6}$$

del mismo modo que en la desmostración de la afirmación anterior definamos

$$C_x = g_x^{-1}((0, +\infty)) \tag{3.7}$$

y haciendo uso de la compacidad de A podemos encontrar $x_1, \ldots, x_{n_0} \in A$ tales que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_0} C_{x_i} \tag{3.8}$$

Sea

$$h \equiv \sum_{i=1}^{n_0} g_{x_i} \in \overline{\mathscr{U}}$$

Por (3.6) se tiene que $h(B) = \{0\}$ y por (3.7) y (3.8) $h(A) \subseteq (0, +\infty)$, por lo que $m = \text{mín}\{h(x) \,:\, x \in A\} > 0$.

Por último definamos

$$f \equiv \text{mín}\left\{\frac{1}{m}h, 1\right\} \in \overline{\mathscr{U}}$$

f satisface que $f(B) = \{0\},\ f(A) = \{1\}$ y $f(X) \subseteq [0,1]$.
la afirmación 3 nos dice que $\overline{\mathscr{U}}$ satisface la condición de Urysohn y por lo tanto $\overline{\mathscr{U}}$ es denso en $C^{\mathbb{R}}(K)$.

□

3.2. Operadores lineales de extensión.

Si X es un espacio topológico normal y A es un subconjunto cerrado de X, la desmostración del Teorema de extensión de Tietze da una forma de construir una función $\Lambda : C_b^{\mathbb{R}}(A) \to C_b^{\mathbb{R}}(X)$ tal que

$$\Lambda(f)\,|_A \equiv f \quad \text{para cada} \quad f \in C_b^{\mathbb{R}}(A)$$

Sin embargo dicha construcción no dota a Λ de propiedades lineales, ni mucho menos topológicas, Dugundji [14] en 1951 dió una manera de hacer una construcción de este tipo; de tal forma que Λ sea un operador lineal y continuo, pero bajo el supuesto de que X sea un espacio métrico. Dedicaremos esta última sección a demostrar este resultado.

Definición 3.2.1. *Sea L un subconjunto no vacío y $<$ una relación binaria sobre L, se dice que $<$ es un* **orden** *sobre L si satisface las siguientes propiedades:*

1. *Si $x, y \in L$ y $x \neq y$ entonces $x < y$ ó $y < x$ (comparabilidad)*
2. *Ningún $x \in L$ verifica $x < x$ (antireflexividad)*
3. *Si $x, y, z \in L$ verifican que $x < y,\ \ y < z$ entonces $x < z$ (transitividad)*

Si además L_0 es un subconjunto de L se dice que $x_0 \in L$ es un **mínimo** *de L_0 si $x_0 \in L$ y para cada $x \in L_0 \setminus \{x_0\}$ se cumple que $x_0 < x$; en este caso representamos a x_0 con la expresión* $\text{mín}\, L_0$.

Definición 3.2.2. *Si $<$ es un orden sobre un conjunto L, se dice que L es un* **buen orden** *si todo subconjunto no vacío de L tiene un mínimo.*

Asumiendo el Axioma de elección se puede demostrar el siguiente resultado:

Teorema 3.2.3. *(Teorema del buen orden)*

Si L es un conjunto no vacío, existe una relación de orden sobre L que es un buen orden.

La demostración del siguiente teorema se puede encontrar en [7] sin embargo daremos la desmostración dada por [9] que es mucho más resumida, y es la que exponemos a continuación.

Teorema 3.2.4. *Todo espacio métrico es paracompacto.*

Demostración: Sea X un espacio métrico con métrica en d y $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ un cubrimiento abierto de X indexado por un conjunto J, por el teorema del buen orden existe una relación de orden $<$ sobre J que es un buen orden.
Definamos la colección $\{D_{\alpha n}\}_{(\alpha,n)\in J\times\mathbb{N}}$ por inducción sobre $\mathbb{N}$ como sigue:

Para $n=1$ Si $\alpha\in J$ definimos

$$D_{\alpha 1}=\bigcup_{x\in P}B_d(x,1/2)$$

donde P es el conjunto de elementos x en X satisfaciendo

- $\alpha=\text{mín}\{\beta\in J\ :\ x\in U_\beta\}$
- $B_d(x,3/2)\subseteq U_\alpha$

Para $n>1$ Si ya hemos definido los conjuntos $D_{\alpha m}$ con $\alpha\in J$ y $m<n$, entonces para cada $\alpha\in J$ definimos

$$D_{\alpha n}=\bigcup_{x\in S}B_d(x,1/2^n) \tag{3.9}$$

donde S es el conjunto de elementos x en X satisfaciendo:

a) $\alpha=\text{mín}\{\beta\in J\ :\ x\in U_\beta\}$

b) $x\notin D_{\beta m}$ con $\beta\in J$ y $m<n$

c) $B_d(x,3/2^n)\subseteq U_\alpha$

veamos que la colección $\{D_{\alpha n}\}_{(\alpha,n)\in J\times\mathbb{N}}$ es un refinamiento abierto localmente finito de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ que cubre a X :

- $\{D_{\alpha n}\}_{(\alpha,n)\in J\times\mathbb{N}}$ cubre a X
  Si $x\in X$, el conjunto $\{\beta\in J\ :\ x\in U_\beta\}$ es no vacío, sea $\alpha_0\in J$ el mínimo de dicho conjunto y $n_0\in\mathbb{N}$ tal que $B_d(x,3/2^{n_0})\subseteq U_{\alpha_0}$, en el caso de que $x\notin D_{\beta j}$ para ningún $\beta\in J$ y $j<n_0$ es claro que $x\in D_{\alpha_0 n_0}$.
- $\{D_{\alpha n}\}_{(\alpha,n)\in J\times\mathbb{N}}$ es un refinamiento abierto de $\{U_\alpha\}_{\alpha\in J}$ si $(\alpha,n)\in J\times\mathbb{N}$ es claro por su definición en (3.9) que el conjunto $D_{\alpha n}$ es abierto además la propiedad c) implica que $D_{\alpha n}$ está contenido en U_α.
- $\{D_{\alpha n}\}_{(\alpha,n)\in J\times\mathbb{N}}$ es localmente finito.

  Sea $x_0\in$ y fijemos

$$\alpha_1=\text{mín}\{\alpha\in J\ :\ x_0\in D_{\alpha n}\text{ para algún }n\in\mathbb{N}\}\tag{3.10}$$

y escojamos $n\in\mathbb{N}$ tal que $x_0\in D_{\alpha_1 n_1}$ y $j\in\mathbb{N}$ lo suficientemente grande satisfaciendo

$$B_d(x_0,1/2^j)\subseteq D_{\alpha_1 n_1}\tag{3.11}$$

demostraremos que el abierto $B_d(x_0,\frac{1}{2^{j+n_1}})$ intercepta solo a una continuidad finita de elementos en $\{D_{\alpha n}\}_{(\alpha,n)\in J\times\mathbb{N}}$, para esto basta con demostrar las siguientes afirmaciones:

Afirmación 1: Si $n\geq n_1+j$ entonces $B_d(x_0,\frac{1}{2^{j+n_1}})$ no interceptata a ningun abierto de la colección $\{D_{\alpha n}\}_{\alpha\in J}$.

Afirmación 2: Si $n<n_1+j$ entonces $B_d(x_0,\frac{1}{2^{j+n_1}})$ intercepta a lo sumo un abierto de la colección $\{D_{\alpha n}\}_{\alpha\in J}$.

Prueba de la afirmación 1. Sea $n\geq n_1+i\ \ (n\in\mathbb{N})$ y $\alpha\in J$, supongamos que $B_d(x,\frac{1}{2^n})$ es una de las bolas que conforman al abierto $D_{\alpha n}$ según (3.9), si este es el caso se tendría por b) que x esta fuera de $D_{\alpha_1 n_1}$ (pues $n_1<n$) y por (3.11) necesariamente $d(x_0,x)\geq\frac{1}{2^J}$ de este modo se obtiene lo siguiente

$$B_d(x,\frac{1}{2^n})\cap B_d(x_0,\frac{1}{2^{n_1+j}})\subseteq B_d(x,\frac{1}{2^{j+1}})\cap B_d(x_0,\frac{1}{2^{j+1}})=\emptyset$$

por lo tanto $D_{\alpha n}\cap B_d(x_0,\dfrac{1}{2^{n_1+1}})=\emptyset$

Prueba de la afirmación 2. Sea $n<n_1+j$ note que basta con mostrar que la distancia entre cualesquiera dos conjuntos distintos en la colección $\{D_{\alpha n}\}_{\alpha\in J}$ es mayor o igual que

$\frac{1}{2^{n_1+j-1}}$, sean $\beta, \gamma \in J$ con $\beta < \gamma$, $p \in D_{\beta n}$, $q \in D_{\gamma n}$, por como se definen los conjuntos $D_{\beta n}$ y $D_{\gamma n}$ existen $x, y \in X$ sastifaciendo

i) $p \in B_d(x, \frac{1}{2^n}) \subseteq D_{\beta n}$

ii) $B_d(x, \frac{3}{2^n}) \subseteq U_\beta$

iii) $q \in B_d(y, \frac{1}{2^n}) \subseteq D_{\gamma n}$

iv) $\gamma = \text{mín}\{\alpha \in J \ : \ z \in U_\alpha\}$

iv) implica que $z \notin U_\beta$ luego por ii) $d(z,y) \geq \frac{3}{2^n}$ obteniendo así las siguientes desigualdades:

$$d(p,q) \geq d(z,y) - d(p,y) - d(q,z) > \frac{3}{2^n} - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2^n} \geq \frac{1}{2^{2^{n_1+j-1}}}$$

□

Definición 3.2.5. *Sea X un espacio métrico, Y un espacio vectorial normado (real o complejo) y A un subconjunto de X, denotaremos por $C_b^Y(A)$ al espacio vectorial que consta de todas las funciones de A en Y continuas y acotadas, el cual consideraremos con la norma del supremo. Si G y H son subespacios vectoriales de $C_b^Y(A)$ y $C_b^Y(X)$ respectivamente, diremos que una aplicación $\Lambda : G \to H$ es un* **operador lineal de extensión** *si Λ es un operador lineal acotada y además satisface lo siguiente:*

$$\Lambda(f)\mid_A = f \quad \textit{para cada} \quad f \in G.$$

La demostración del siguiente teorema fue tomada de [11].

Teorema 3.2.6. *(Barsuk - Dugundji) Sea A un subconjunto no vacío y cerrado de un espacio métrico X y sea Y un espacio vectorial normado (real o complejo), existe un operador lineal de extensión $\Lambda : C_b^Y(A) \to C_b^Y(X)$ tal que $||\Lambda|| = 1$.*

Demostración: Sea d una métrica para X y denotemos por $||\cdot||$ a la norma sobre Y, para cada $x \in X \setminus A$ definamos

$$V_x = B_d(x, \frac{1}{3}d(x,A)) \subseteq X \setminus A$$

La colección $\{V_x\}_{x\in X\setminus A}$ es un cubrimiento abierto de $X\setminus A$, por lo que existirá un conjunto T y un refinamiento abierto localmente finito $\{W_t\}_{t\in T}$ del cubrimiento $\{V_x\}_{x\in X\setminus A}$ que a su vez cubre a $X\setminus A$, para cada $t\in T$ definamos:

$$\begin{aligned} P_t &: X\setminus A \to \mathbb{R}^+ \\ P_t(x) &= \frac{d(x,X\setminus W_t)}{\sum\limits_{s\in T} d(x,X\setminus W_s)} \quad (x\in X\setminus A) \end{aligned}$$

Observaciones con respecto a la familia $\{P_t\}_{t\in T}$. Si $x\in X\setminus A$ exsite $\varepsilon>0$ tal que el conjunto

$$L=\{s\in T\ :\ B_d(x,\varepsilon)\cap W_s\neq\emptyset\}$$

es finito, por lo tanto si $s\in T\setminus L$ entonces $x\in X\setminus W_s$ y así $d(x,X\setminus W_s)=0$ por lo que la expresión

$$\sum_{s\in T} d(x,X\setminus W_s)$$

en realidad representa la suma finita

$$\sum_{s\in L} d(x,X\setminus W_s)$$

y esta última expresión es distinta de cero, pues si lo fuese necesariamente se cumple que

$$x\in\bigcap_{s\in T} X\setminus W_s = X\setminus\bigcup_{s\in T} W_s = X\setminus(X\setminus A)=A$$

lo cual es una contradicción pues $x\in X\setminus A$, además

$$P_t(z)=\frac{d(z,X\setminus W_t)}{\sum\limits_{s\in L} d(z,X\setminus W_S)} \quad \text{para cada } z\in B(x,\varepsilon)$$

lo que nos dice que P_t es continua en x (y en consecuencia $P_t\in C^{\mathbb{R}}(X\setminus A)$)
por otra parte

$$\sum_{t\in T} P_t(x)=\sum_{t\in T}\frac{d(x,X\setminus W_t)}{\sum\limits_{s\in L} d(x,X\setminus W_s)}=\sum_{t\in S}\frac{d(x,X\setminus W_t)}{\sum\limits_{s\in L} d(x,X\setminus W_s)}=1$$

en resumen, hemos demostrado que

$$(*)\ \ \{P_t\}_{t\in T} \subseteq C^{\mathbb{R}}(X\setminus A)$$

y

$$(**)\ \ \sum_{t\in T} P_t \equiv 1$$

Siguiendo con la demostración del Teorema escojamos para cada $t\in T$, un elemento w_t en W_t y otro v_t en A tal que $d(w_t,v_t) < 2d(w_t,A)$. (esto lo podemos hacer ya que $W_t \subseteq X\setminus A$ para cada $t\in T$) y para cada $f\in C_b^Y(A)$ definamos $\Lambda(f)$ como sigue:

$$\Lambda(f)(x) = \begin{cases} f(x) & si \quad x\in A \\ \sum_{t\in T} p_t(x) f(v_t) & si \quad x\in X\setminus A \end{cases}$$

tal como definimos $\Lambda(f)$ se tiene de forma inmediata que $\Lambda(f)$ extiende a f, además si $x\in X\setminus A$ entonces

$$\begin{aligned} ||\Lambda(f)(x)|| = ||\sum_{t\in T} p_t(x) f(v_t)|| &\leq \sum_{t\in T} p_t(x)||f(v_t)|| \\ &\leq \sum_{t\in T} p_t(x)||f|| = ||f|| \end{aligned}$$

lo que implica que $||\Lambda(f)||_\infty = ||f||_\infty$ y así $||\Lambda|| = 1$, además Λ es lineal puesto que las colecciones $\{p_t\}_{t\in T}$ y $\{v_t\}_{t\in T}$ solo dependen del refinamiento $\{W_t\}_{t\in T}$ y no de f.
Para terminar la demostración del Teorema solo faltaría mostrar la continuidad de $\Lambda(f)$, note que $\Lambda(f)\mid_A$ y $\Lambda(f)\mid_{X\setminus A}$ son ambas continuas por lo que bastaría con ver la continuidad de $\Lambda(f)$ en puntos de la frontera de A.
Sea $x_0\in \partial A\subseteq A$ y $\varepsilon > 0$, por la continuidad de f existe $\delta > 0$ sastifaciendo lo siguiente

$$\text{Si } x\in A \text{ y } d(x,x_0) < \delta \Rightarrow ||f(x)-f(x_0)|| < \varepsilon \tag{3.12}$$

Afirmación: Si $x\in X$ y $d(x,x_0) < \delta/6$ entonces $||\Lambda(f)(x) - \Lambda(f)(x_0)|| < \varepsilon$.

Sea $x\in X$ con $d(x,x_0) < \delta/6$, si $x\in A$ la condición (3.12) implica lo requerido, así que supongamos que $x\in X\setminus A$, consideremos el conjunto

$$T_0 = \{t\in T \ :\ x\in W_t\}$$

el cual sabemos que es finito, además $p_t(x) = 0$ para cada $t \in T \setminus T_0$, obteniendo así

$$\Lambda(f)(x) = \sum_{t \in T_0} p_t(x) f(v_t)$$

sea $s \in T_0$ y $x_1 \in X \setminus A$ tal que

$$W_s \subseteq V_{x_1}$$

de este modo $x \in V_{x_1}$ y así

$$d(x_1, A) \leq d(x_1, x_0) \leq d(x_1, x) + d(x, x_0) < \frac{1}{3} d(x_1, A) + \frac{\delta}{6}$$

estas desigualdades implican que $d(x_1, A) < \frac{\delta}{4}$ y $d(x_1, x_0) < \frac{\delta}{4}$, además

$$d(w_s, x_0) \leq d(w_s, x_1) + d(x_1, x_0) \leq \frac{1}{3} d(x_1, A) + d(x_1, x_0) < \frac{\delta}{3}$$

y

$$d(v_s, x_0) \leq d(v_s, w_s) + d(w_s, x_0) < 2d(w_s, A) + \frac{\delta}{3} \leq 2d(w_s, x_0) + \frac{\delta}{3} < \delta$$

por lo tanto (3.12) asegura que

$$||f(v_s) - f(x_0)|| < \varepsilon$$

y así

$$\begin{aligned} ||\Lambda(f)(x) - \Lambda(f)_(x_0)|| &= ||\sum_{t \in T_0} p_t(x) f(v_t) - \sum_{t \in T_0} p_t(x) f(x_0)|| \\ &\leq \sum_{t \in T_0} p_t(x) ||f(v_t) - f(x_0)|| \\ &< \sum_{t \in T_0} p_t(x) \varepsilon = \varepsilon \end{aligned}$$

$\square$

Bibliografía

[1] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*. Vol. 1, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. 48, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000. MR 2001b:46001

[2] B. Cascales, A. J. Guirao and V. Kadets, *A Bishop-Phelps-Bollobás type theorem for uniform algebras,* Adccepted in Advances in Mathematics (2013).

[3] Y. Sung, D. Garcia, S. Kim and M. Maestre, *Some geometric propierties on disk albebras*. Preprint.

[4] H. G. Dales, *Banach algebras and automatic continuity*, London Mathematical Society Monographs. New Series, vol. 24, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000, Oxford Science Publications. MR 1816726 (2002e:46001)

[5] F. Hausdorff, *Über halbstetige Funktionen und deren Verallgemeinerung*. Mathematische Zeitschrift 5 (1919), 292-309

[6] G. J. O. Jameson, *Topology and normed spaces*, Chapman and Hall, London, 1974. MR 57 #3828

[7] J. Munkres, *Topology*, Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, Inc. , c2000

[8] G. Nagy, *Notes and Book Projects*.

[9] M. Rudin, *A new proof that metric spaces are paracompact*, Proc. AMS 20 (1969), 603; MR 38, #5171

[10] W. Rudin, *Real and complex analysis,* third ed., McGraw-Hill Book Co., New York, 1987. MR 924157 (88k:00002)

[11] Z. Semadeni, *Banach spaces of continuos functions*,Warszawa : Polish Scientific, 1971

[12] H. Tietze, *Über Funktionen, die auf einer abgeschlossenen Menge stetig sind*, J. für die reine und angew. Math. 145 (1915), 9-14

[13] P. Urysohn, *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann. 94 (1925), 262-295

[14] J. Dugundji, *An extension of Tietze's theorem*, Pacific J. Math. 1 (1951), 353-367; MR 13, 373